Beispiele

Gleichungssysteme mit Bruchtermen

(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)

Problematik

Lineare Gleichungssysteme können relativ einfach und systematisch mit Hilfe verschiedener Verfahren (Additionsverfahren, Einsetztungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) aufgelöst werden. Liegt nun aber ein Gleichngssystem mit Bruchtermen (also nicht mehr linear) vor, z.B.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \frac{4}{2x-1}+\frac{1}{4y+1} & = & 1 \\ \text{(II)} & \frac{2}{2x-1}-\frac{3}{4y-1} & = & 2 \end{array}\right\}$$

dann kann man nicht mehr so systematisch vorgehen wie bei den linearen Gleichungssystemen. In bestimmten Fällen können wir aber so ein Gleichungssystem mit dem Wissen über die linearen Gleichungssysteme trotzdem lösen. Die folgenden Beispiele zeigen ein paar typische Fälle, wobei es aber natürlich noch viele andere gibt, auch solche, die mit den zur Verfügung gestellten Mitteln nicht gelöst werden können.

Wichtige Punkte bei der Lösung von Gleichungssystemen mit Bruchtermen

- Definitionsbereich festlegen (Nenner dürfen nicht Null sein)
- Man schaut, ob es Bruchterme hat, die sich nur um einen Faktor unterscheiden. Falls ja, kann man diese Bruchterme bequem mit dem Additionsverfahren eliminieren.
- Falls es keine Bruchterme gibt, die sich nur um einen Faktor unterscheiden, dann kann man versuchen, ob sich die Gleichungen durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in lineare überführen lassen.
- Falls man für eine Variable die Lösung bestimmen konnte, kann man diese natürlich in das Gleichungssystem einsetzten um die zugehörige Lösung der zweiten Variable zu finden.

Beispiel 1

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \dfrac{2x+4}{4x-7} & = & \dfrac{y-1}{2y+3} \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{1}{-2y+2} & = & \dfrac{2}{x+7} \end{array}\right\}$$

$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \left\{-7, \frac{7}{4}\right\}$ und $\mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$

In diesem Beispiel gibt es keine Bruchterme, die sich nur um einen Faktor unterscheiden. Wir werden deshalb versuchen, ob wir durch Multiplikation der Gleichungen mit dem Hauptnenner ein Gleichungssystem erhalten, welches wir lösen können:

$\boxed{\text{(I)} \cdot (4x-7) \cdot 2y+3}$

$$\begin{aligned} (2x+4)(2y+3) &= (y-1)(4x-7) \\ 4xy+6x+8y+12 &= 4xy-4x-7y+7 && \mid -4xy+4x+7y-12 \\ 10x+15y &= -5 && \mid \div 5 \\ 2x+3y &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(II)} \cdot (x+7) \cdot (-2y+2)}$

$$\begin{aligned} x+7 &= 2(-2y+2) \\ x+7 &= -4y+4 && \mid +4y-7 \\ x+4y &= -3 \end{aligned}$$

Also:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I}'\text{)} & 2x+3y & = & -1 \\ \text{(II}'\text{)} & x+4y & = & -3 \end{array}\right\}$$

Nun:

$\boxed{\text{(I}'\text{)} - 2 \cdot \text{(II}'\text{)}}$

$$\begin{aligned} 3y-8y &= -1-(-6) \\ -5y &= 5 && \mid \div (-5) \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{4 \cdot \text{(I}'\text{)} - 3 \cdot \text{(II}'\text{)}}$

$$\begin{aligned} 8x-3x &= -4-(-9) \\ 5x &= 5 && \mid \div 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Da $x=1$ und $y=-1$ im Definitionsbereich liegen, folgt

$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1,-1)\}}}$

Beispiel 2

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{2y+2} & = & 3 \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{7}{3x}-\dfrac{1}{y+1} & = & 5 \end{array}\right\}$$

$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Die Bruchterme unterscheiden sie jeweils nur um einen Faktor, d.h. wie können die Bruchterme jeweils eliminieren, ohne vorher den Nenner wegzuschaffen.

$\boxed{\frac{7}{3} \cdot \text{(I)} - \text{(II)}}$

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2y+2} + \frac{1}{y+1} &= \frac{7}{3} \cdot 3 - 5 \\ \frac{49}{6y+6} + \frac{1}{y+1} &= 2 && \mid \cdot 6\,(y+1) \\ 49 + 6 &= 12y + 12 && \mid -12 \\ 43 &= 12y && \mid \div 12 \\ \frac{43}{12} &= y \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(I)} + \frac{7}{2} \cdot \text{(II)}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3x} &= 3 + \frac{7}{2} \cdot 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{49}{6x} &= \frac{41}{2} && \mid \cdot 6x \\ 6 + 49 &= 123x && \mid \div 123 \\ \frac{55}{123} &= x \end{aligned}$$

Da $x = \frac{55}{123}$ und $y = \frac{43}{12}$ im Definitionsbereich liegen, folgt

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{55}{123}, \frac{43}{12} \right) \right\}}}$$

Beispiel 3

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \dfrac{4}{2x-1}+\dfrac{1}{4y+1} & = & 1 \\[2ex] \text{(II)} & \dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{4y-1} & = & 2 \end{array}\right\}$$

$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ und $\mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

Die Bruchterme mit dem x unterscheiden sich jeweils um einen Faktor, die mit y hingegen nicht. Wir eliminieren deshalb zuerst den Bruchterm mit dem x und können somit y bestimmen. Diese Lösung für y kann man dann in eine der beiden Gleichungen einsetzen und dann aus dieser Gleichung das x bestimmen.

$\boxed{\text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)}}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4y+1} + 2 \cdot \frac{3}{4y-1} &= 1-4 \\
\frac{1}{4y+1} + \frac{6}{4y-1} &= -3 && | \cdot (4y+1)(4y-1) \\
4y-1+6\cdot(4y+1) &= -3\cdot(4y+1)(4y-1) \\
28y+5 &= -48y^2+3 && | + 48y^2 - 3 \\
48y^2+28y+2 &= 0 && | \div 2 \\
24y^2+14y+1 &= 0 && |\text{Quadratische Gleichung} \\
y_{1,2} &= \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 24\cdot 1}}{2\cdot 24} \\
&= \frac{-14\pm\sqrt{100}}{48} = \frac{-14\pm 10}{48} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Setze } y_1 = -\frac{1}{12} \text{ in (I) ein}}$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2x-1} + \frac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)+1} &= 1 \\
\frac{4}{2x-1} + \frac{1}{\frac{2}{3}} &= 1 \\
\frac{4}{2x-1} + \frac{3}{2} &= 1 && | - \frac{3}{2} \\
\frac{4}{2x-1} &= -\frac{1}{2} && | \cdot 2\,(2x-1) \\
8 &= -(2x-1) \\
8 &= -2x+1 && | - 1 \\
7 &= -2x && | \div (-2) \\
-\frac{7}{2} &= x_1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Setze } y_2 = -\frac{1}{2} \text{ in (I) ein}}$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2x-1} + \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} &= 1 \\
\frac{4}{2x-1} + \frac{1}{-1} &= 1 && \mid +1 \\
\frac{4}{2x-1} &= 2 && \mid \cdot (2x-1) \\
4 &= 2 \cdot (2x-1) && \mid \cdot 2\,(2x-1) \\
4 &= 4x - 2 && \mid +2 \\
6 &= 4x && \mid \div 2 \\
\frac{3}{2} &= x_2
\end{aligned}$$

Da $x_1 = -\frac{7}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{12}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ im Definitionsbereich liegen, folgt

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{12}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}}}$$