Exponentielles Wachstum und Exponentieller Zerfall

Definition:

Von Exponentiellem Wachstum bzw. Zerfall sprechen wir, wenn sich eine Menge während einer bestimmten Zeiteinheit immer um den gleichen Faktor vergrössert bzw. verkleinert. Dieses Verhalten kann mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$f(t) = a \cdot b^t$$

Dabei bedeuten:

- a Startmenge (zur Zeit 0)
- $f(t)$ Menge zur Zeit t
- t Zeit
- b Wachstumsfaktor für eine Zeiteinheit ($b > 1$ bedeutet Wachstum, $b < 1$ bedeutet Zerfall)
- b^t Wachstumsfaktor für die Zeitdauer t

Gesuchte Grössen bestimmen:

- $f(t) = a \cdot b^t$
- $a = \dfrac{f(t)}{b^t}$
- $b = \sqrt[t]{\dfrac{f(t)}{a}}$
- $t = \dfrac{\log \frac{f(t)}{a}}{\log b}$

Wachstumsfaktor bestimmen:

- Zunahme bzw. Abnahme in Prozent p gegeben:

  $$b = 1 \pm \frac{p}{100}$$

  zum Beispiel:

  - Zinssatz von 5% $\Rightarrow b = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$
  - Wertverminderung um 3% $\Rightarrow b = 1 - \frac{3}{100} = 0.97$

- Wachstumsfaktor r für einen Zeitraum t gegeben:

  $$b = \sqrt[t]{r}$$

  zum Beispiel:

  - Halbwertszeit 100 Jahre $\Rightarrow b = \sqrt[100]{\frac{1}{2}} = 0.99309$
  - Verdreifachung in 10 Jahren $\Rightarrow b = \sqrt[10]{3} = 1.11612$

- Mengen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten (Zeitunterschied t) gegeben:

  $$b^t = \frac{\text{Menge 2}}{\text{Menge 1}}$$

  $$b = \sqrt[t]{\frac{\text{Menge 2}}{\text{Menge 1}}}$$

  zum Beispiel:

  - Vom Jahr 1860 bis 1980 ist die Bevölkerung der Schweiz von 2'510'500 auf 6'366'000 angewachsen.
    $\Rightarrow b = \sqrt[120]{\frac{6366000}{2510500}} = 1.00778$