Lineare Funktionen

www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

Funktionsgleichung und Graph

- Allgemeine Form der linearen Funktionsgleichung:

$$\boxed{y = m \cdot x + q}$$

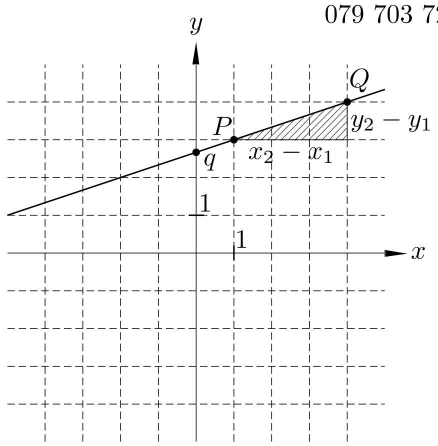
- m = Steigung

  Man kann die Steigung aus dem Graphen mit Hilfe des Steigungdreiecks ablesen oder mit Hilfe zweier Punkte $P\,(x_1/y_1)$ und $Q\,(x_2/y_2)$ berechnen:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

- q = y-Achsenabschnitt

  Der y-Achsenabschnitt gibt an, wo die Gerade die y-Achse schneidet.



Prüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Um zu prüfen, ob $P\,(x/y)$ auf einer Geraden $g: y = mx + q$ liegt, muss der Punkt in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

- erfüllt der Punkt die Gleichung, liegt er auf der Geraden
- erfüllt der Punkt die Gleichung nicht, liegt er nicht auf der Geraden

Beispiel:

$P\,(1/5)$, $Q\,(3/-2)$, $\quad g: y = 2x + 3$

- $P\,(1/5)$ liegt auf g, denn $5 = 2 \cdot 1 + 3$
- $Q\,(3/-2)$ liegt nicht auf g, denn $-2 \neq 2 \cdot 3 + 3$

Fehlende Koordinate eines Punktes berechnen, welcher auf einer Geraden liegt

Um die fehlende Koordinate eines Punktes $P\,(x/?)$ oder $Q\,(?/y)$ auf der Geraden $g: y = mx + q$ zu berechnen, kann einfach die bekannte Koordinate in die Funktionsgleichung von g eingesetzt werden.
Speziell:

- Nullstellen: $y = 0$ einsetzen
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $y = 0$ einsetzen
- Schnittpunkte mit der y-Achse: $x = 0$ einsetzen

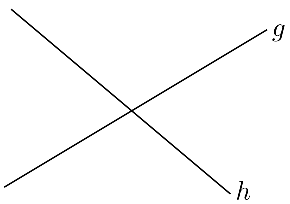
Beispiel:

$P\,(1/?)$, $Q\,(?/-2)$ sollen auf $g: y = 2x + 3$ liegen.

- Setze $x = 1$ ein: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
  $\Rightarrow P\,(1/5)$
- Setze $y = -2$ ein: $-2 = 2 \cdot x + 3$
  $\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}/-2\right)$

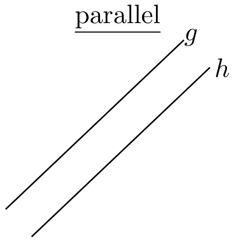
Verschiedene Lagen von Geraden

sich schneidend



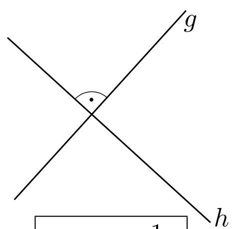
$m_g \neq m_h$

parallel



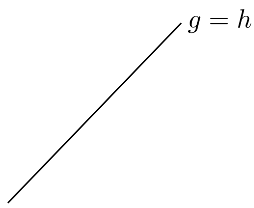
$m_g = m_h$

senkrecht



$$\boxed{m_g = -\frac{1}{m_h}}$$

identisch



$m_g = m_h$ und $q_g = q_h$

Graph einer linearen Funktion zeichnen

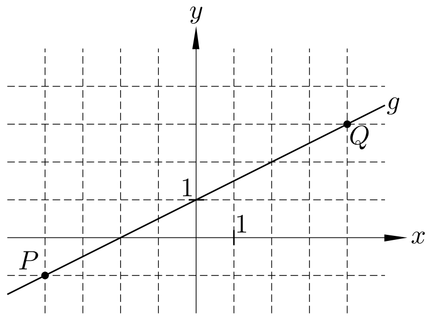
- 1. Möglichkeit:
  - berechne zwei beliebige Punkte (wähle dazu x beliebig, setze es in die Funktionsgleichung ein und berechne y)
  - zeichne die beiden Punkte in ein Koordinatensystem ein
  - zeichne die Gerade durch die beiden Punkte
- 2. Möglichkeit:
  - starte beim y-Achsenabschnitt q
  - trage von dort aus die Steigung $m = \frac{y}{x}$ ab: x Einheiten nach rechts, y Einheiten nach oben (oder nach unten, falls m negativ ist)

Beispiel:

Zeichne den Graph von $g : y = \frac{1}{2}x + 1$.

- Wähle $x = -4$: $\Rightarrow\ y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1$
- Wähle $x = 4$: $\Rightarrow\ y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$

Also: $P\,(-4/-1)$ und $Q\,(4/3)$



Funktionsgleichung einer linearen Funktion bestimmen

- 1. Schritt:

  Bestimme die Steigung m
  - Falls zwei Punkte $P\,(x_1/y_1)$ und $Q\,(x_2/y_2)$ der Geraden gegeben sind:
  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
  - Falls die Gerade parallel zu einer anderen Geraden $h : y = m_h \cdot x + n_h$ sein soll:
  $$m = m_h$$
  - Falls die Gerade senkrecht zu einer anderen Geraden $h : y = m_h \cdot x + q_h$ sein soll:
  $$m = -\frac{1}{m_h}$$
- 2. Schritt:

  Setze das oben bestimmte m sowie die Koordinaten eines Punktes der Geraden in $y = mx + q$ ein und berechne q

Beispiel (Gerade durch 2 Punkte):

Bestimme die Gerade durch $P\,(1/-2)$ und $Q\,(-1/4)$.

- $m = \dfrac{4-(-2)}{-1-1} = -3$
- $4 = -3 \cdot (-1) + q \Rightarrow\ q = 1$

Also: $y = -3x + 1$ ist die gesuchte Gerade.

Beispiel (Gerade parallel zu h):

Bestimme die Gerade durch $P\,(3/-2)$, die parallel zur Geraden $y = -4x + 7$ ist.

- $m = -4$
- $-2 = -4 \cdot 3 + n \Rightarrow\ q = 10$

Also: $y = -4x + 10$ ist die gesuchte Gerade.

Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen

Bestimmen des Schnittpunkts S von zwei Geraden

$$g : y = m_g \cdot x + q_g \quad \text{und} \quad h : y = m_h \cdot x + q_h$$

- 1. Schritt:

  Setze die Gleichungen gleich und berechne x.
- 2. Schritt:

  Setze das berechnte x in eine der beiden Geraden ein und berchne y

(Man kann den Schnittpunkt auch grafisch bestimmen, in dem an die beiden Geraden in ein Koordinatensystem zeichnet und dann den Schnittpunkt abliest. Da dies aber ungenaue Resultate liefert, ist es keine Alternative zur Berechnung.)

Beispiel:

Bestimme den Schnittpunkt von $g : y = 2x + 3$ und $h : y = -x + 6$.

- $2x + 3 = -x + 6$
  $\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow\ x = 1$
- $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

Also: $S\,(1/5)$