Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$ax^2+bx+c=0$

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Diskriminante: $D=b^2-4ac$

$D>0 \Rightarrow$ 2 Lösungen

$D=0 \Rightarrow$ 1 Lösung

$D<0 \Rightarrow$ 0 Lösungen

$ax^2+c=0$ (dh. $b=0$)

Ganz normal auflösen:

$$ax^2+c=0 \quad |-c$$
$$ax^2=-c \quad |\div a$$
$$x^2=-\frac{c}{a} \quad |\sqrt{\ }$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$ax^2+bx=0$ (dh. $c=0$)

x ausklammern:

$$x(ax+b)=0$$

- $x=0$
- $ax+b=0 \quad |-b$
  $ax=-b \quad |\div a$
  $x=-\frac{b}{a}$

Alternative zur Lösungsformel: Quatratisch Ergänzen

Rezept:

Schritt 1: Dividieren, so dass $a=1$

Schritt 2: Quadratisch Ergänzen: Füge „$+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$" ein.

Schritt 3: Binomische Formel: $x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$

Schritt 4: Löse nach x auf.

Beispiel:

$$2x^2-5x-3=0 \quad |\div 2$$
$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$$
$$\underbrace{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}}-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}=0$$
$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}=0 \quad |+\frac{49}{16}$$
$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16} \quad |\sqrt{\ }$$
$$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4} \quad |+\frac{5}{4}$$
$$x=\pm\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\begin{cases}3\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Alternative zur Lösungsformel: Faktorisieren (geht nur für ganzzahlige Lösungen gut)

Rezept:

Schritt 1: Dividieren, so dass $a=1$
(falls b, c nicht ganzzahlig → Formel)

Schritt 2: Faktorisieren (Binomische Formel, Pröbeln)

Schritt 3: Faktoren $=0$ setzen

Beispiel:

$$2x^2+4x-6=0 \quad |\div 2$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$(x-1)(x+3)=0$$

- $x=1$
- $x=-3$

Gleichungen, die auf Quadratische Gleichungen führen:

- x in jedem Summanden: z.B. $x^3+2x^2-4x=0$
  ↳ x ausklammern und Faktoren einzeln $=0$ setzen
- Biquadratische Gleichung: z.B. $x^4+3x^2-2=0$
  ↳ Substitution: $u=x^2$
- Weitere Substitutionen: z.B. $\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+2\left(\frac{1}{x-1}\right)-5=0 \quad |u=\frac{1}{x-1}$
  $u^2+2u-5=0$
  ...