

# QUADRATWURZELN

- Regeln:
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
  - $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
  - $\sqrt{a^2} = a$  (nur für positive  $a$ , sonst Betragsstriche)
  - $(\sqrt{a})^2 = a$
  - ~~$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  !!~~

- Potenzgesetze:
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
  - $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
  - $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

- Binomische Formeln:
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

## Wurzeln aus Zahlen:

- Quadratzahlen:  $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$
- keine Quadratzahlen:  $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4 \cdot \sqrt{2}$ 
  - ↳ Strategie: Zerlege die Zahl unter der Wurzel in ein Produkt, so dass der eine Faktor eine möglichst grosse Quadratzahl ist. ← Teilweise radizieren
- Brüche:  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ 
  - ↳ Strategie: ziehe aus Zähler und Nenner einzeln die Wurzel

• Kommazahlen:  $\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$

↳ Strategie: Wandle die Kommazahl in einen Bruch um.

• Grasse Zahlen:  $\sqrt{1764} = \sqrt{4 \cdot 441} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 49} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

↳ Strategie: Zerlege die Zahl in ein Produkt, wenn möglich von Quadratzahlen.

• Produkte von Wurzeln:  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

↳ Können bei einem Produkt (Bruch) von Wurzeln die einzelnen Wurzeln nicht vereinfacht werden, kann man das Produkt (Bruch) unter eine Wurzel nehmen.

## Wurzeln aus Variablen

• Quadrate:  $\sqrt{a^2} = |a|$

• Gerade Exponenten:  $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = a^2$  ← Betrag nicht notwendig da  $a^2$  sowieso  $\geq 0$  ist.  
 $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|$

• Ungerade Exponenten:  $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{(a^2)^2 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$  ←

$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{(a^3)^2 \cdot a} = a^3 \cdot \sqrt{a}$  ←

Betrag nicht notwendig, da  $a \geq 0$  sein muss, da sonst in der Ausgangswurzel eine negative Zahl unter der Wurzel wäre.

## Wurzeln aus Produkten und Brüchen:

↳ Strategie: zieh aus jedem Faktor die Wurzel einzeln

$$\sqrt{\frac{32a^3b}{c^3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b}{c^2 \cdot c}} = \frac{4a}{c} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

kein Betrag notwendig, da  $a, c \geq 0$  (siehe Ausgangswurzel)

## Wurzeln aus Summen und Differenzen:

↳ Strategie: Versuche die Summe / Differenz in Faktoren zu zerlegen (Ausklammern, Binomische Formeln, Teilsummen; Probieren)

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$$

$$\sqrt{a^3 - a^2b} = \sqrt{a^2(a-b)} = |a|\sqrt{a-b}$$

## Produkte / Brüche von mehreren Wurzeln:

↳ Können bei einem Produkt (Bruch) von Wurzeln die einzelnen Wurzeln nicht vereinfacht werden, kann man das Produkt (Bruch) unter eine gemeinsame Wurzel nehmen.

$$\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a^3} = \sqrt{2a \cdot 8a^3} = \sqrt{16a^4} = 4a^2$$

$$\frac{\sqrt{50b^3}}{\sqrt{18b}} = \sqrt{\frac{50b^3}{18b}} = \sqrt{\frac{25b^2}{9}} = \frac{5b}{3}$$

## Faktoren in Wurzel reinziehen:

↳ Nimmt man einen Faktor, der vor der Wurzel steht, unter die Wurzel hinein, muss er ins Quadrat gesetzt werden. Man darf das nur mit Faktoren  $\geq 0$  machen.

Dieses Vorgehen ist sinnvoll, wenn in der Wurzel ein Bruch steht, welchen man mit dem Faktor ausserhalb der Wurzel kürzen könnte.

$$a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

bei beiden muss vorausgesetzt werden das der Faktor  $\geq 0$  ist.

## Nenner Wurzelfrei machen:

- Nenner ist eine Wurzel (oder ein Produkt)

↳ Strategie: Erweitere den Bruch mit der Nennerwurzel

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

- Nenner ist eine Summe, und ein Summand (oder mehrere) sind Wurzeln:

↳ Strategie: Erweitere nach der 3. Binomischen Formel:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

müssen verschieden sein.

## Summe von Bruchtermen mit Wurzeln im Nenner:

- ↳ Strategie:
- ① Mache alle Nenner wurzelfrei
  - ② Mache gleichnamig
  - ③ Nimm alles auf einen Bruch und vereinfache

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(x+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} - \frac{1 \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x\sqrt{x} + \sqrt{x}) - x(\sqrt{x} + 1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2\sqrt{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

## Einfache Quadratische Gleichungen: (x unter dem Quadrat)

↳ Strategie: Bringe das Quadrat alleine auf eine Seite und ziehe die Wurzel

$$\begin{aligned}x^2 + 2 &= 6 && | -2 \\x^2 &= 4 && | \sqrt{\phantom{x}} \\x &= \pm \sqrt{4} = \pm 2\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-2, 2\}}}$$

$$\begin{aligned}(x-3)^2 - 2 &= 7 && | +2 \\(x-3)^2 &= 9 && | \sqrt{\phantom{x}} \\x-3 &= \pm 3 && | +3 \\x &= \pm 3 + 3\end{aligned}$$

$$x_1 = +3 + 3 = 6$$

$$x_2 = -3 + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0, 6\}}}$$

## Wurzelgleichungen: (x unter einer oder mehreren Wurzeln)

↳ Strategie: Bringe die Wurzel alleine auf eine Seite und quadriere → Probe unerlässlich.  
Bei mehreren Wurzeln wiederhole das für jede Wurzel.

$$\begin{aligned}5\sqrt{x^2-1} - 4x &= 0 && | +4x \\5\sqrt{x^2-1} &= 4x && | \text{Quadrieren} \\25 \cdot (x^2-1) &= 16x^2 && | \text{Termumformung} \\25x^2 - 25 &= 16x^2 && | -16x^2 + 25 \\9x^2 &= 25 && | \div 9 \\x^2 &= \frac{25}{9} && | \sqrt{\phantom{x}} \\x &= \pm \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe für } x = \frac{5}{3}: \quad LS &= 5 \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1} - 4 \cdot \frac{5}{3} = 5 \cdot \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}} - \frac{20}{3} \\ &= 5 \cdot \sqrt{\frac{16}{9}} - \frac{20}{3} = 5 \cdot \frac{4}{3} - \frac{20}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$RS = 0$$

Probe für  $x = -\frac{5}{3}$ : ✓ (Rechnung wie oben)

$$\underline{\underline{L = \left\{ -\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right\}}}$$

Wurzeln aus Zahlen von 100 bis 10'000 raten:

100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Endziffern:	1	<del>2</del>	<del>3</del>	4	5	6	<del>7</del>	<del>8</del>	9	0
	↓			↓	↓	↓			↓	↓
	1,9			2,8	5	4,6			3,7	0

Strategie: Wurzeln von Zahlen zwischen 100 und 10'000 ergeben 2-stellige Zahlen.

↓  
nur geeignet, wenn es schön aufgeht

Schritt 1: Zwischen welchen „schönen“ Quadratzahlen liegt die Zahl unter der Wurzel  
⇒ vordere Ziffer

Schritt 2: Aus der letzten Ziffer der Zahl unter der Wurzel kann man die zweite Ziffer ablesen, wobei es manchmal 2 Möglichkeiten gibt.

Schritt 3: Überprüfe durch Quadrieren des Resultats

$$\sqrt{5329} = \underline{\underline{73}} \quad \text{denn:}$$

- 5329 liegt zwischen 4900 und 6400
- Endziffer ist 9, dh. unsere zweite Ziffer ist 3 oder 7
- Überprüfen ergibt:  $73^2 = 5329$