Eidgenössische Maturitätsprüfung
Mathematik Normales Niveau
Frühling 1997, Bern

www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Resultate können exakt angegeben werden (d.h. Wurzeln, gekürzte Brüche, π, ... stehenlassen). Dezimalbrüche sind auf 3 wesentliche Ziffern zu runden.
- Jede Aufgabe wird mit gleich vielen Punkten bewertet. Für die Note 6 ist die maximale Punktzahl nicht nötig.

Aufgabe 1
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0.5x^3 + 4$.

a) Berechne Extremalstellen und Wendepunkte von f sowie den Schnittwinkel von f mit der x-Achse. Skizziere damit die Kurve f.

b) f begrenzt mit den positiven Koordinatenachsen ein endliches Flächenstück, welches um die x-Achse gedreht wird. Dem entstehenden Rotationskörper wird der gerade Kreiszylinder mit gleicher Symmetrieachse und maximalem Volumen einbeschrieben. Wie viele Prozente des Rotationskörpervolumens werden durch diesen Kreiszylinder ausgefüllt?

Aufgabe 2
Gegeben sind der Kreis k mit Mittelpunkt $M(20/0)$ und Radius 13 sowie die Gerade g mit der Gleichung $4x - 3y = 0$.

a) Gesucht ist der Radius des kleinsten Kreises, welcher g und k berührt.

b) Die Gerade g wird um den Punkt $P(3/4)$ gedreht, bis sie k berührt. Wie gross ist der Drehwinkel?

c) Gesucht sind die Gleichungen derjenigen Geraden, welche parallel zu g verlaufen und aus k eine Sehne der Länge 24 herausschneiden.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x-a}{x^2}$ mit dem Parameter a.
Beweise oder widerlege folgende Aussagen. Die Antworten sind hinreichend zu begründen.

a) Für jeden Wert von a liegen die lokalen Extremalpunkte auf der Kurve $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Falls $a = 1$, schneidet f die Gerade $9x - 4y - 3 = 0$ in drei verschiedenen Punkten.

c) F sei der Inhalt des endlichen Flächenstücks, welches durch die positive x-Achse, f und die Gerade $x = e$ begrenzt ist. Falls $a = 2$ ist, ist $F < 1$. (e ist die Eulersche Zahl.)

Aufgabe 4

a) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ sowie ein Vektor $\vec{b}$, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht.

a1) Bestimme $\vec{b}$ so, dass $\vec{a} + \vec{b}$ dreimal solang ist wie $\vec{a}$.

a2) Bestimme für den Spezialfall $u = -9, v = 6$ die Komponenten von $\vec{b}$ so, dass $\vec{a} + \vec{b}$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $2x - y = 0$ verläuft.

b) Gegeben sind die Punkte $A(-4/3/2)$ und $C(4/-3/2)$. $\overline{AC}$ ist die Diagonale eines Quadrates $ABCD$, dessen Ecke B in der xy-Ebene liegt. Berechne die Koordinaten der Ecken B und D.

Aufgabe 5

a) In der Urne U_1 liegen zwei Kugeln mit der Anschrift "Auszahlung" und fünf Kugeln mit der Anschrift "Verlust". In der Urne U_2 liegen 2 Kugeln mit der Anschrift "1 CHF", 2 Kugeln mit der Anschrift "8 CHF" und 3 Kugeln mit der Anschrift "10 CHF".

a1) Nach dem Bezahlen von 1 CHF beginnt ein Spiel. Es wird aus U_1 und U_2 je eine Kugel genommen. Wird aus U_1 eine Kugel mit der Anschrift "Auszahlung" gezogen, erhält man soviel ausbezahlt, wie auf der aus U_2 gezogenen Kugel angeschrieben ist. Im anderen Fall erhält man nichts.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, nach zwei solchen Spielen kein Geld verloren zu haben?

a2) Aus der Urne U_2 werden mit einem Griff 2 Kugeln genommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der zwei angeschriebenen Beträge mindestens 11 CHF ist?

b) Die Kurve $y = \cos 2x$ ist parallel zur y-Achse so zu verschieben, dass sie die Kurve $y = \sin(2x)$ im I. Quadranten berührt. Berechne die Koordinaten des Berührpunktes sowie die Länge der Verschiebungsstrecke