

Eidgenössische Maturitätsprüfung

Mathematik Normales Niveau

Frühling 2005, Bern



www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden.
- Resultate sollen nach Möglichkeit exakt angegeben werden, d.h. Wurzeln, gekürzte Brüche, π , ... stehenlassen. Dezimalbrüche sind sinnvoll zu runden, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

Aufgabe 1

Es wird die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = ax^3 - x$ ($a \neq 0$) betrachtet.

- Diskutiere die Funktion für $a = \frac{1}{4}$ (Nullstellen, Extremalstellen, Wendestellen, Verhalten im Unendlichen) und erstelle eine Skizze ihres Graphen.
- Zeige, dass der Graph von f mit der Winkelhalbierenden $y = x$ (je nach gewähltem a) entweder einen oder drei gemeinsame Punkte besitzt.

Im zweiten Fall schliessen der Graph von f und diese Winkelhalbierende zwei kongruente Flächen ein. Bestimme a derart, dass die Inhalte dieser beiden Fläche je 1 sind.

Aufgabe 2

Löse die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

- 2.1) Der Betrag eines Vektors \vec{a} ist dreimal so gross wie derjenige eines Vektors \vec{b} ; der Vektor \vec{a} steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$.
Bestimme den Zwischenwinkel von \vec{a} und \vec{b} .
- 2.2) Gegeben ist ein erster Kreis k_1 mit der Gleichung $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$ und die Gerade g durch die beiden Punkte $(-3/5)$ und $(4/6)$.
Bestimme Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 des Kreises k_1 sowie den Radius r_2 eines zweiten Kreises k_2 , der den Mittelpunkt $M_2(1/2)$ hat und die Gerade g berührt.

Aufgabe 3

- a) In einer Urne befinden sich 2 rote, 2 blaue, 6 weisse und 10 schwarze Kugeln. Man zieht gleichzeitig und zufällig 2 Kugeln. Untersuche, ob die folgende Behauptung wahr ist:
"Die Wahrscheinlichkeit, 2 verschieden farbige Kugeln zu ziehen, ist genau doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit, 2 gleich farbige Kugeln zu ziehen."
- b) Eine andere Urne enthält 10 Kugeln, wovon einige schwarz und die anderen weiss sind. Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen zweier Kugeln 2 gleich farbige zu erhalten, ist um $\frac{1}{15}$ kleiner als die Wahrscheinlichkeit, zwei verschieden farbige Kugel zu ziehen.
Wie viele weisse Kugeln sind in der Urne?
-

Aufgabe 4

Löse die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

- 4.1) Bestimme eine reelle Zahl c derart, dass sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \frac{1}{c}e^x$ in einem Punkt berühren.
Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen und der y -Achse eingeschlossen wird?
- 4.2) Es wird die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = a \cdot \sin x + \cos x$ ($a > 0$) betrachtet.
- Skizziere den Graphen von f für $a = 1$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).
 - Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion f bei $x = \frac{\pi}{6}$ ein Maximum besitzt?
-

Aufgabe 5

Löse das folgende Gleichungssystem auf:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \lg(x) + \lg(y) = 2 \\ \text{(II)} \quad \lg(x+7) - \lg(y-8) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{dabei ist } \lg \text{ der Logarithmus zur Basis } 10).$$

Das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 3bx - y = c \\ \text{(II)} \quad 12x - by = d \end{array} \right\} \quad (\text{dabei sind } b, c \text{ und } d \text{ reelle Zahlen})$$

besitzt unendlich viele Lösungspaare. Eines dieser Lösungspaare ist auch Lösung des obigen Gleichungssystems. Bestimme b, c und d (alle Lösungen).