Passerelle
Mathematik
Frühling 2006, Bern

www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

- Dauer: 4 Stunden
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden.
- Resultate sollen nach Möglichkeit exakt angegeben werden, d.h. Wurzeln, gekürzte Brüche, π, ... stehenlassen. Dezimalbrüche sind auf 3 wesentliche Ziffern zu runden.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

Aufgabe 1

Von der Funktion $g(x) = 1 + \sin\dfrac{5x}{2}$ mit $\mathbb{D}_g = [0, 2\pi]$ sind alle Nullstellen im Definitionsbereich, der erste positive Extremwert und eine Skizze des Graphen gesucht (ohne eine Kurvendiskussion zu machen).

Aufgabe 2

Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennen wir $A(-4/-2)$, $B(6/3)$ und $C(11/11)$.

a) Berechne die Koordinaten von Ecke D.

b) Betrachte den Kreis mit Mittelpunkt D und Seite $a = AB$ als Tangente; in welchem Punkt schneidet dieser Kreis die Seite $c = CD$?

c) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm?

Aufgabe 3

Welche Koordinaten hat der Hochpunkt des Graphen von

$$f(x) = \frac{ax^3 + 4x}{x^2 - 4}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

wenn die Tangente an den Graphen in $P(1/?)$ parallel zur Geraden $14x + 3y + 2 = 0$ ist?
Verwende nun die bekannten Punkte, um (ohne Kurvendiskussion) eine Skizze des Graphen zu machen.

Aufgabe 4

Einem Halbkreis mit bekanntem Radius r ist ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf dem Durchmesser liegt.
Wie lang müssen die Rechteckseiten werden, damit der Umfang maximal wird?
Wie gross wird dann dieser maximale Umfang?

Aufgabe 5

Berechne die reelle Zahl $a > 0$ so, dass der Graph von $\quad g(x) = ax^3 + 1 \quad (\mathbb{D}_g = \mathbb{R})$ die Nullstelle $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ besitzt.
Skizziere dann die Graphen von $g(x)$ und $\quad f(x) = \cos x \quad (\mathbb{D}_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right])$ und berechne den Flächeninhalt derjenigen beschränkten Fläche, die durch die beiden Graphen begrenzt wird.

Aufgabe 6

Wir betrachten ein regelmässiges Sechseck $ABCDEF$ und eine Urne, welche 6 mit A,B,C,D,E,F beschriftete Kugeln enthält; so wird durch das Ziehen einer Kugel ein Eckpunkt des Sechsecks bestimmt.

a) Wie ziehen aus der Urne nacheinander drei Kugeln, wobei die gezogene Kugel immer wieder zurückgelegt wird.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass damit

   1) nur ein Punkt bestimmt wird (also dreimal die gleiche Kugel gezogen wird)?
   2) zwei - aber nicht drei - verschiedene Punkte bestimmt werden und deren Verbindungslinie ein Durchmesser des Umkreises des Sechsecks ist?
   3) drei verschiedene Punkte bestimmt werden?

b) Wie ziehen nun gleichzeitig drei Kugeln.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindungslinien der dadurch bestimmten Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden?