

Passerelle Mathematik Frühling 2005 bis Herbst 2006



www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra	3
1.1 Termumformungen	3
1.2 Gleichungen	4
1.3 Textaufgaben	5
1.4 Diverse	6
2 Analysis	7
2.1 Polynomfunktionen	7
2.2 Gebrochene Rationale Funktionen	8
2.3 Trigonometrische Funktionen	9
3 Extremwertaufgaben	10
4 Geometrie	11
5 Vektorgeometrie / Analytische Geometrie in der Ebene	12
6 Wahrscheinlichkeitsrechnung	14

1 Algebra

1.1 Termumformungen

Aufgabe 1

□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (3)*

b) Vereinfache $\tan(45^\circ + \beta) - \tan(45^\circ - \beta)$.

1.2 Gleichungen

Aufgabe 2

□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (6)*

- 2) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $\sin x = \frac{1}{10}x$, wenn $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 3

□□□□□□□ *Frühling 2005, Bern (2)*

- 1) Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 12 = x + \frac{1}{x}$$

Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen.

1.3 Textaufgaben

Aufgabe 4

□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (6)*

- 1) Untersuche, ob es zwei Zahlen a und b gibt, für welche sowohl ihre Differenz als auch die Differenz des natürlichen Logarithmus der beiden Zahlen 1 ergibt.

1.4 Diverse

Aufgabe 5

□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (6)*

3) Beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(9^n - 1)$ ist ohne Rest durch 8 teilbar.

2 Analysis

2.1 Polynomfunktionen

Aufgabe 6

□□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (1)*

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades (mit Definitionsmenge \mathbb{R}) berührt im Ursprung die x -Achse und besitzt im Punkt $B(-3/0)$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 6x - 1$ ist.

Suche die Funktionsvorschrift, diskutiere anschliessend die Funktion und skizziere den Graphen.

Aufgabe 7

□□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (1)*

Bestimme die Punkte des Graphen von $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ mit horizontaler Tangente und skizziere den Graphen.

Berechne den Flächeninhalt der beschränkten Fläche, welche vom Graphen von $f(x)$ und seiner Tangente im Tiefpunkt begrenzt wird.

Aufgabe 8

□□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (3)*

Gegeben ist die Parabelschar $f_k(x) = kx - k^2x^2$ ($k \in \mathbb{R}, k > 0$).

- Zeichne in einem Koordinatensystem mit der Einheit 10 cm die Parabeln für $k = 1$ und $k = 4$.
- Bestimme allgemein (d.h. in Abhängigkeit von k) die Nullstellen und Extremalstellen der Parabeln.
- Zeige, dass die Parabelscheitel in Abhängigkeit von k auf einer Geraden liegen.
- Bestimme k derart, dass $\frac{1}{4}$ der Inhalt derjenigen beschränkten Fläche ist, die von der Parabel mit der x -Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 9

□□□□□□□□ *Frühling 2005, Bern (1)*

Von einer ganzrationalen Funktion 3. Grades kennt man die zwei relativen Extrema $A(1/1)$ und $B(3/-1)$. Suche die Funktionsvorschrift, skizziere den Graphen und berechne den Flächeninhalt der durch Graph und Tangente im Hochpunkt begrenzten Fläche.

(Wer den ersten Teil nicht lösen konnte, fährt mit der falschen Lösung $f(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$ weiter).

2.2 Gebrochene Rationale Funktionen

Aufgabe 10

□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (3)*

Welche Koordinaten hat der Hochpunkt des Graphen von

$$f(x) = \frac{ax^3 + 4x}{x^2 - 4}, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

wenn die Tangente an den Graphen in $P(1/?)$ parallel zur Geraden $14x + 3y + 2 = 0$ ist?

Verwende nun die bekannten Punkte, um (ohne Kurvendiskussion) eine Skizze des Graphen zu machen.

2.3 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 11

□□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (1)*

Von der Funktion $g(x) = 1 + \sin \frac{5x}{2}$ mit $\mathbb{D}_g = [0, 2\pi]$ sind alle Nullstellen im Definitionsbereich, der erste positive Extremwert und eine Skizze des Graphen gesucht (ohne eine Kurvendiskussion zu machen).

Aufgabe 12

□□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (5)*

Berechne die reelle Zahl $a > 0$ so, dass der Graph von $g(x) = ax^3 + 1$ ($\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$) die Nullstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ besitzt.

Skizziere dann die Graphen von $g(x)$ und $f(x) = \cos x$ ($\mathbb{D}_f = [0, \frac{\pi}{2}]$) und berechne den Flächeninhalt derjenigen beschränkten Fläche, die durch die beiden Graphen begrenzt wird.

3 Extremwertaufgaben

Aufgabe 13

□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (2)*

Eine oben offene und quaderförmige Kiste soll einen quadratischen Boden besitzen und einen Rauminhalt von $V = 2 \text{ m}^3$ aufweisen; das Material für die vier Seitenflächen ist doppelt so teuer wie dasjenige für den Boden.

Wie gross sind die Kantenlänge des Quadrates und die Höhe zu wählen, wenn die totalen Materialkosten möglichst gering sein sollen?

Aufgabe 14

□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (4)*

Einem Halbkreis mit bekanntem Radius r ist ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf dem Durchmesser liegt.

Wie lang müssen die Rechteckseiten werden, damit der Umfang maximal wird?

Wie gross wird dann dieser maximale Umfang?

Aufgabe 15

□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (6)*

Wie müssen wir Quadratseite und Höhe einer geraden quadratischen Pyramide wählen, wenn die Oberfläche 200 beträgt und das Volumen maximal werden soll?

Aufgabe 16

□□□□□□□ *Frühling 2005, Bern (4)*

Es wird der Graph der Funktion mit der Vorschrift $f(x) = \sqrt{9-x}$ ($0 \leq x \leq 9$) betrachtet. In einem Punkt P des Graphen wird die Parallele zur y -Achse gelegt. Diese schneidet die x -Achse im Punkt X .

Für welchen Punkt P wird der Flächeninhalt des Dreiecks OXP maximal? (O ist der Koordinatenursprung.)

4 Geometrie

Aufgabe 17

□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (3)*

- a) In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ist die Basis $c = 18$ und der Winkel $\gamma = 40^\circ$.

Wie lang sind die Schwerelinie (Seitenhalbierende) s_b , die Höhe h_b und die Winkelhalbierende w_β ?

Aufgabe 18

□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (4)*

Von einem Sehnenviereck (ein Viereck mit Umkreis) $ABCD$ kennen wir $a = \overline{AB} = 5$, $c = \overline{CD} = 4.3$, die Diagonale $\overline{AC} = e = 5.4$ und den Winkel $\beta = 94^\circ$ in Ecke B .

Suche die Längen der Seiten b, d und den Winkel α in Ecke A .

Aufgabe 19

□□□□□□□ *Frühling 2005, Bern (2)*

- 2) Von einem Dreieck ABC kennt man die Höhe $h_b = 14.7$ (Höhe der Seite b) und die beiden Winkel $\beta = 101.4^\circ$ und $\gamma = 35.8^\circ$.

Berechne die Längen der drei Seiten.

5 Vektorgeometrie / Analytische Geometrie in der Ebene

Aufgabe 20

□□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (4)*

Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises, der durch $A(12/13)$ und $B(21/16)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden mit der Gleichung $2x + 3y - 80 = 0$ liegt.

Wie gross ist der Flächeninhalt des Kreissektors MAB ?

Aufgabe 21

□□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (2)*

Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennen wir $A(-4/-2)$, $B(6/3)$ und $C(11/11)$.

- Berechne die Koordinaten von Ecke D .
- Betrachte den Kreis mit Mittelpunkt D und Seite $a = AB$ als Tangente; in welchem Punkt schneidet dieser Kreis die Seite $c = CD$?
- Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm?

Aufgabe 22

□□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (5)*

- a) Gegeben sind die Gerade g und die Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} durch

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist O der Koordinatenursprung.

- Bestimme den Abstand der Geraden g vom Ursprung und den Fusspunkt F dieses Abstands.
 - Stelle den Vektor $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$ als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} dar.
- b) Die Flächeninhalte zweier Kreis k_1 mit Mittelpunkt $M_1(-5/0)$ und k_2 mit Mittelpunkt $M_2(4/12)$ verhalten sich wie $4 : 1$.

Die beiden Kreisflächen besitzen einen gemeinsamen Punkt T . Bestimme T und die Gleichung der gemeinsamen Kreistangente in T .

Aufgabe 23

□□□□□□□□ *Frühling 2005, Bern (3)*

Gegeben sind der Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(20/0)$ und dem Radius $r_1 = 15$ und die Gerade g durch die beiden Punkte $A(-5/0)$ und $B(1/8)$.

- Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des kleinsten Kreises, welcher die Gerade g und den Kreis K_1 berührt.
- Um welchen Winkel muss die Gerade g um den Punkt A gedreht werden, bis sie den Kreis K_1 berührt.

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Gerade $a : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimme die Parametergleichung einer Geraden n durch den Punkt $P(3/10)$, die senkrecht zu g steht.
- b) Bestimme die Parametergleichung einer Geraden $b \parallel a$ mit $P \in b$.
- c) Bestimme den Flächeninhalt und die Innenwinkel des Dreiecks PNB , wobei $N = n \cap g$ und $B = b \cap g$.

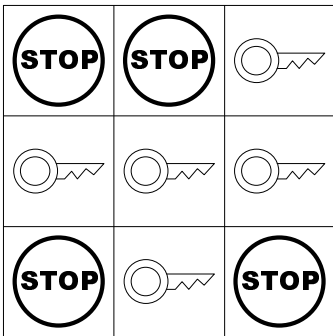
6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 25

□□□□□□□ *Herbst 2006, Basel (5)*

Familie Meister hat im Schweizer Fernsehquiz MEGAHERZ gewonnen und kann nun entweder den erspielten Betrag entgegennehmen oder um ein Auto spielen. Sei entschieden sich für das Spiel um das Auto.

Dabei kann sie 4 von 9 Feldern aufdecken. Befinden sich unter den aufgedeckten Feldern mindestens 3 Schlüssel, so gehört das Auto ihnen, andernfalls gehen sie leer aus. Hinter 5 der 9 Feldern befinden sich Schlüssel, hinter den restlichen 4 Feldern Verkehrsschilder.



- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Familie Meister das Auto gewinnt?
- In den ersten beiden Feldern hat Familie Meister bereits zwei Schlüssel aufgedeckt. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Auto gewinnt.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei gleichbleibenden Spielregeln in 8 Sendungen mindestens 3 Autos gewonnen werden?

Aufgabe 26

□□□□□□□ *Frühling 2006, Bern (6)*

Wir betrachten ein regelmässiges Sechseck $ABCDEF$ und eine Urne, welche 6 mit A, B, C, D, E, F beschriftete Kugeln enthält; so wird durch das Ziehen einer Kugel ein Eckpunkt des Sechsecks bestimmt.

- Wie ziehen aus der Urne nacheinander drei Kugeln, wobei die gezogene Kugel immer wieder zurückgelegt wird.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass damit

- nur ein Punkt bestimmt wird (also dreimal die gleiche Kugel gezogen wird)?
- zwei - aber nicht drei - verschiedene Punkte bestimmt werden und deren Verbindungslinie ein Durchmesser des Umkreises des Sechsecks ist?
- drei verschiedene Punkte bestimmt werden?

- Wie ziehen nun gleichzeitig drei Kugeln.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindungslinien der dadurch bestimmten Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden?

Aufgabe 27

□□□□□□□ *Herbst 2005, Basel (2)*

Sanguinetti besitzt einen gezinkten Würfel, bei welchem die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ erscheint. Die übrigen Augenzahlen haben gleiche Wahrscheinlichkeit (je $\frac{1}{6}$).

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dreimal hintereinander die gleiche Zahl zu würfeln.
- Corleone hat in zwei Würfeln total 5 Augen geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 dabei war?
- Wie oft muss Vanzetti würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit $p \geq 0.995$ mindestens einmal eine 6 zu würfeln?

Drei Kinder A, B und C versuchen, einen Ball in einen Korb zu werfen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist bei jedem Wurf $p = \frac{2}{5}$.

Der Reihe nach werfen $A, B, C, A, B, C, A, B, C, A, \dots$

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kinder in ihrem ersten Versuch den Korb treffen?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines drei Kinder in seinem ersten Versuch den Korb trifft?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach je drei Versuchen noch keines der Kinder den Korb getroffen hat?
- d) Nach wie vielen Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Treffer erzielt worden ist, grösser 0.999?