

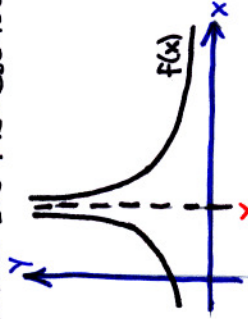
# Stetigkeit & Differenzierbarkeit

## Definition:

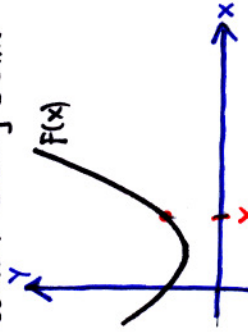
- Eine Funktion  $f(x)$  heißt stetig in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt.  
 Falls eine Funktion in allen  $x_0$  stetig ist, dann sagt man  $f(x)$  ist stetig.
- Eine Funktion  $f(x)$  heißt differenzierbar, wenn  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existiert.  
 Ist eine Funktion für alle  $x_0$  differenzierbar, dann sagt man  $f(x)$  ist differenzierbar.

## Anschaulich:

- Eine Funktion ist an einer Stelle stetig, wenn sie dort definiert ist und keinen Sprung macht.
- Eine Funktion ist an einer Stelle differenzierbar, wenn sie dort glatt (keine Spitze) ist. Dazu muss sie insbesondere auch stetig sein.



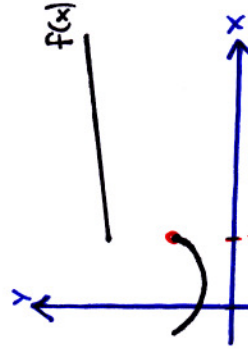
$f$  ist nicht definiert an der Stelle  $x_0$ , also auch nicht stetig und nicht differenzierbar.



$f$  hat an der Stelle  $x_0$  keinen Sprung und ist glatt.  $\Rightarrow$  stetig und differenzierbar.



$f$  hat an der Stelle  $x_0$  keinen Sprung aber dafür eine Spitze.  $\Rightarrow$  stetig aber nicht differenzierbar.



$f$  hat an der Stelle  $x_0$  einen Sprung und ist somit natürlich auch nicht glatt.  $\Rightarrow$  weder stetig noch differenzierbar.

## Konkret:

Alle für uns relevanten Funktionen sind stetig und differenzierbar auf dem ganzen Definitionsbereich, bis auf folgende Ausnahmen:

- $f(x) = \sqrt{x}$  (sowie weitere Wurzelfunktionen): nicht differenzierbar an der Stelle  $x=0$  ( $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , senkrechte Tangente)
- $f(x) = |x|$  (sowie weitere Betragsfunktionen): nicht differenzierbar an der Stelle  $x=0$  (|-|- umschreiben in zusammenge...)
- $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$  stetig falls  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$   
 differenzierbar falls  $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$  und  $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$  (an der Stelle  $x_0$ )