**Theorie**

# Abbildungen in der Ebene

*(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)*

# 1 Abbildungen in der Ebene

## 1.1 Drehung um den Nullpunkt: $\mathrm{D}_{\varphi,(0,0)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll nun um einen gegebenen Winkel $\varphi$ gedreht werden und zwar mit dem Drehzentrum im Nullpunkt. Gesucht sind dann die Koordinaten des so entstandenen Bildpunktes $\mathrm{D}_{\varphi,(0,0)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 1).

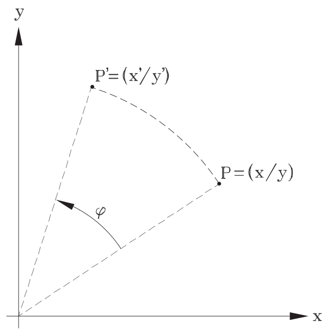


Abbildung 1: Drehung um den Nullpunkt

**Lösung:** In unserer Skizze zeichnen wir nun noch den Hilfswinkel $\alpha$ ein.

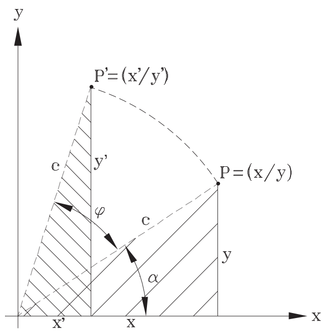


Abbildung 2: Drehung um den Nullpunkt

Weiter gilt sicher $c = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} x &= c\cos(\alpha) \\ y &= c\sin(\alpha) \\ x' &= c\cos(\alpha+\varphi) \\ y' &= c\sin(\alpha+\varphi) \end{aligned}$$

Nun lieferen uns die Additionstheoreme der Trigonometrie die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} x' &= c\cos(\alpha+\varphi) = c\cos(\alpha)\cos(\varphi) - c\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ &= x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ y' &= c\sin(\alpha+\beta) = c\cos(\alpha)\sin\varphi + c\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ &= x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Also:

$$P' = (x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi), x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi))$$

## 1.2 Spiegelung an der $x$-Achse: $\mathbf{AS}_{0,(0,0)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll nun an der $x$-Achse gespiegelt werden. Gesucht sind dann die Koordinaten des Punktes $\mathrm{AS}_{0,(0,0)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 3).

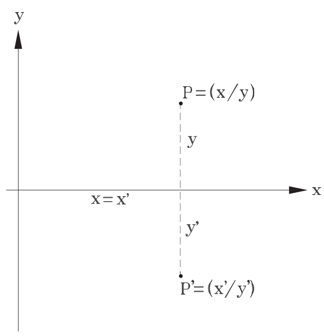


Abbildung 3: Spiegelung an der $x$-Achse

**Lösung:** Aus der Skizze kann sofort abgelesen werden, dass $x' = x$ und $y' = -y$ gelten muss. Also:

$$P' = (x, -y)$$

## 1.3 Spiegelung am Nullpunkt: $\mathbf{PS}_{(0,0)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll am Nullpunkt gespiegelt werden. Gesucht sind dann die Koordinaten des Punktes $\mathrm{PS}_{(0,0)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 4).
**Lösung:** Aus der Skizze kann sofort abgelesen werden, dass $x' = -x$ und $y' = -y$ gelten muss. Also:

$$P' = (-x, -y)$$

## 1.4 Zentrische Streckung vom Nullpunkt aus: $\mathbf{Z}_{\lambda,(0,0)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll nun vom Nullpunkt aus um den Faktor $\lambda$ gestreckt werden, d.h. sein Anstand vom Nullpunkt soll sich um den Faktor $\lambda$ verändern. Gesucht sind dann die Koordinaten des Punktes $\mathrm{Z}_{\lambda,(0,0)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 5).
**Lösung:** Seien $c, c'$ die Abstände der Punkte $P, P'$ vom Nullpunkt. Dann gilt $c' = \lambda c$. Damit folgt mit dem Strahlensatz:

$$\lambda = \frac{c'}{c} = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$$

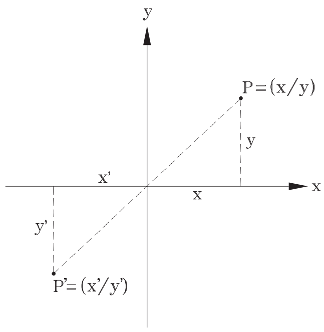


Abbildung 4: Spiegelung am Nullpunkt

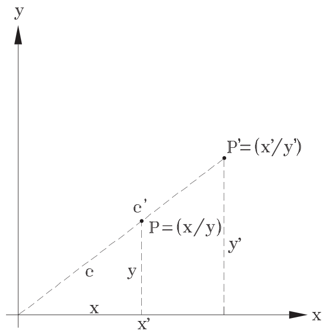


Abbildung 5: Zentrische Streckung vom Nullpunkt aus

also gilt $x' = \lambda x$ und $y' = \lambda y$, und somit

$$P' = (\lambda x, \lambda y)$$

## 1.5 Transaltion: $\mathbf{T}_{(\Delta x, \Delta y)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll in Richtung der $x$-Achse um $\Delta x$ und in $y$-Richtung um $\Delta y$ verschoben werden. Gesucht sind dann die Koordinaten des Punktes $\mathrm{T}_{(\Delta x, \Delta y)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 6).

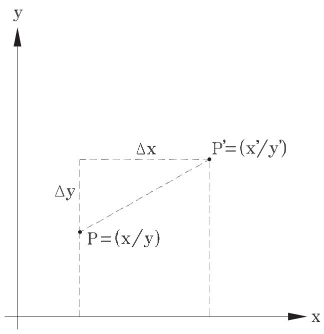


Abbildung 6: Translation

**Lösung:** Aus der Skizze kann sofort abgelesen werden, dass $x' = x + \Delta x$ und $y' = y + \Delta y$ gelten muss. Also:

$$P' = (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

## 1.6 Drehung um einen beliebigen Punkt: $\mathrm{D}_{\varphi,(m_x,m_y)}$

**Problem:** Gegeben sei ein Punkt $P = (x/y)$ in der Ebene. Dieser soll nun um einen zweiten Punkt $M = (m_x, m_y)$ um einen gegebenen Winkel $\varphi$ gedreht werden. Gesucht sind dann die Koordinaten des so entstandenen Bildpunktes $\mathrm{D}_{\varphi,(m_x,m_x)}(P) = P' = (x', y')$ (siehe Abb. 7).

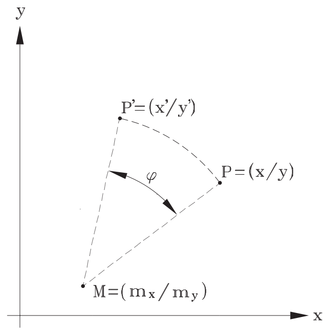


Abbildung 7: Drehung um einen beliebigen Punkt

**Lösung:** Wir versuchen, dieses Problem auf einfachere Probleme zurückzuführen. In Abbildung 8 sieht

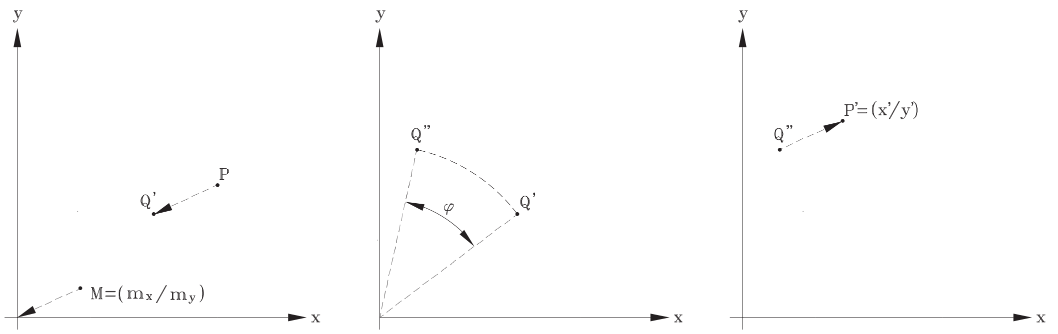


Abbildung 8: Drehung um einen beliebigen Punkt

man, dass wir die Drehung um den Punkt $M$ erhalten, wenn wir zuerst $M$ in den Nullpunkt verschieben, dann dort drehen und am Schluss die Verschiebung wieder rückgängig machen. Also:

$$P' = \mathrm{T}_{(m_x,m_y)}\left(\mathrm{D}_{\varphi,(0,0)}\left(\mathrm{T}_{(-m_x,-m_y)}(P)\right)\right)$$

Diese Abbildungen kennen wir aber schon und wir können somit $P'$ berechnen.