



Fragen und Antworten

Elementare Geometrie

(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrie	2
1.1	Fragen	2
1.1.1	Rechteck	2
1.1.2	Dreieck	2
1.1.3	Kreis	3
1.1.4	Bogenmaß	4
1.2	Antworten	5
1.2.1	Rechteck	5
1.2.2	Dreieck	7
1.2.3	Kreis	10
1.2.4	Bogenmaß	15

1 Geometrie

1.1 Fragen

1.1.1 Rechteck

Frage 1: Welche Größen sind bei einem Rechteck von Interesse?

Frage 2: Wie berechnest Du die Fläche eines Rechtecks, wenn Du die Seitenlängen a und b gegeben hast.

Frage 3: Löse die Gleichung $F_R = ab$ nach a auf. Wozu kannst Du die so entstandene Gleichung brauchen?

Frage 4: Wie berechnest Du den Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ?

Frage 5: Löse die Gleichung $U_R = 2(a + b)$ nach a auf. Wozu kannst Du die so entstandene Gleichung brauchen?

Frage 6: Wie lautet der Satz von Pythagoras?

Frage 7: Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ?

Frage 8: Wie berechnest Du die Seitenlänge a eines Rechtecks, wenn Du die andere Seitenlänge b und die Diagonale d kennst?

Frage 9: Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3$ und $b = 4$. Wie lang ist die Diagonale, wie lang der Umfang und wie groß die Fläche?

Frage 10: Gegeben ist die Fläche eines Rechtecks $F_R = 6$ und eine Seitenlänge $a = 2$. Berechne die fehlende Seitenlänge b , den Umfang U_R und die Diagonale d des Rechtecks.

Frage 11: Gegeben ist ein Rechteck mit dem Umfang $U_R = 8$ und einer Seitenlänge $a = 1$. Berechne die fehlende Seitenlänge b , die Fläche F_R und die Diagonale d des Rechtecks.

Frage 12: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge $a = 2$. Berechne den Umfang U_R , die Seitenlänge b und Diagonale d des Quadrats.

Frage 13: Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit der Fläche $F_Q = 25$?

Frage 14: Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit dem Umfang $U_Q = 24$?

1.1.2 Dreieck

Frage 15: Welche Größen sind bei einem Dreieck von Interesse?

Frage 16: Welche Größen benötigst Du um die Fläche F_D eines Dreiecks zu berechnen und wie lautet die entsprechende Formel?

Frage 17: Löse die Gleichung $F_D = \frac{ch_c}{2}$ nach h_c und nach c auf. Wozu sind die so entstandenen Gleichungen gut?

Frage 18: Welche Größen benötigst Du um den Umfang U_D eines Dreiecks zu berechnen und wie lautet die entsprechende Formel?

Frage 19: Löse die Gleichung $U_D = a + b + c$ nach a auf. Wozu ist die so entstandene Gleichung gut?

Frage 20: Wie groß ist die Winkelsumme in einem Dreieck?

Frage 21: Was ist ein gleichschenkliges Dreieck?

Frage 22: Was ist ein gleichseitiges Dreieck?

Frage 23: Wie groß sind die Winkel α, β, γ eines gleichseitigen Dreiecks?

Frage 24: In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Winkel γ der Winkel, den die zwei gleich langen Seiten einschließen. Wenn Du γ kennst, wie groß sind dann α und β ?

Frage 25: In welchen Dreiecken kannst Du den Satz von Pythagoras anwenden?

Frage 26: Wie groß ist die Höhe h_c in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a ?

Frage 27: Ein Dreieck habe die Seitenlängen $a = b = c = 2$. Berechne die Höhe h_c .

Frage 28: Wie groß ist der Umfang U_D in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a ?

Frage 29: Ein gleichseitiges Dreieck sei durch den Umfang $U_D = 6$ gegeben. Wie lang sind die Seiten a, b, c , wie lang die Höhe h_c und wie groß die Fläche F_D ?

Frage 30: Ein gleichschenkliges Dreieck sei durch die Seitenlängen $a = b$ und c gegeben. Berechne die Höhe h_c von dem Dreieck.

Frage 31: Ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ sei durch den Umfang $U_D = 14$ und die Seite $c = 6$ gegeben. Berechne die Seitenlängen a und b , die Höhe h_c und die Fläche F_D .

Frage 32: Ein Dreieck habe die Fläche $F_D = 12$ und die Höhe $h_c = 3$. Berechne die Länge der Seite c .

1.1.3 Kreis

Frage 33: Welche Größen sind bei einem Kreis von Interesse?

Frage 34: Welcher Zusammenhang besteht in einem Kreis zwischen dem Durchmesser d und dem Radius r ?

Frage 35: Wie groß ist π . Welche Näherung für π benützt man häufig um Überschlagsrechnungen zu machen?

Frage 36: Welche Größen benötigst Du, um die Fläche F_K eines Kreises zu berechnen und wie lautet die entsprechende Formel?

Frage 37: Löse die Gleichung $F_D = \pi r^2$ nach r auf. Wozu ist die so entstandene Gleichung gut?

Frage 38: Welche Größen benötigst Du, um den Umfang U_K eines Kreises zu berechnen?

Frage 39: Löse die Gleichung $U_D = 2\pi r$ nach r auf. Wozu ist die so entstandene Gleichung gut?

Frage 40: Berechne Umfang und Fläche eines Kreises mit Radius $r = 1$.

Frage 41: Berechne Umfang und Fläche eines Kreises mit Radius $r = 2$.

Frage 42: Was ist ein Sektor eines Kreises?

Frage 43: Welche Größen brauchst Du um die Länge b des Bogens von einem Sektor zu berechnen? Kennst Du die entsprechende Gleichung auswendig? Falls nicht, leite sie her.

Frage 44: Welche Größen brauchst Du um den Umfang U_{Sek} eines Sektors zu berechnen? Leite die entsprechende Formel her.

Frage 45: Welche Größen brauchst Du um die Fläche F_{Sek} eines Sektors zu berechnen? Leite die entsprechende Formel her.

Frage 46: Sei ein Sektor durch die Größen $r = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ gegeben. Berechne die Länge b des Bogen sowie den Umfang U_{Sek} und die Fläche F_{Sek} .

Frage 47: Was ist ein Segment eines Kreises?

Frage 48: Welche Größen brauchst Du, um die Länge b des Bogens von einem Segment zu berechnen? Kennst Du die entsprechende Gleichung auswendig? Falls nicht, leite sie her.

Frage 49: Für die restlichen Größen (h, s, U_{Seg}, F_{Seg}) würde man trigonometrische Funktionen brauchen, um allgemeine Formeln angeben zu können. Für spezielle Segmente können wir diese auch so lösen. Dazu ein Beispiel:

Sei ein Segment mit $r = 1$ und $\alpha = 60^\circ$ gegeben. Berechne $b, h, s, U_{Seg}, F_{Seg}$.

1.1.4 Bogenmaß

Frage 50: Was ist das Bogenmaß?

Frage 51: Wie rechnest Du einen Winkel, der im Bogenmaß gegeben ist in das Gradmaß um?

Frage 52: Wie rechnest Du einen Winkel, der im Gradmaß gegeben ist in das Bogenmaß um?

Frage 53: Rechne die folgenden Winkel ins Gradmaß um:

a) 360° b) 180° c) 90° d) 45° e) 47°

Frage 54: Rechne die folgenden Winkel vom Bogenmaß ins Gradmaß um:

a) π b) $\pi/5$ c) 2π d) 0.73 e) $\pi/2$

Frage 55: Welches ist wohl der größte Vorteil, bzw. Nachteil des Bogenmaß im Vergleich mit dem Gradmaß?

Frage 56: Sei ein Kreissektor gegeben durch den Kreisradius $r = 1$ und den Winkel $\alpha = 2$ im Bogenmaß. Wie lange ist die Bogenlänge b ?

Frage 57: Was sind Bogenminuten, bzw. Bogensekunden?

1.2 Antworten

1.2.1 Rechteck

Antwort 1: Bei einem Rechteck interessieren uns vor allem folgende Größen (siehe dazu Abb. 1) :

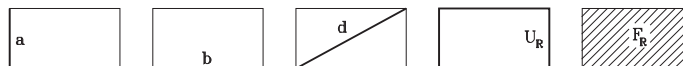


Abbildung 1: Interessante Größen in einem Rechteck

- die Seiten a und b
- die Diagonale d
- der Umfang U_R
- die Fläche F_R

Antwort 2: Die Formel für die Fläche eines Rechtecks lautet:

$$F_R = ab.$$

Antwort 3: Wir teilen die Gleichung $F_R = ab$ durch b und erhalten somit

$$a = \frac{F_R}{b}.$$

Diese Gleichung können wir benutzen, um die Seite a zu berechnen, wenn wir die Fläche des Rechtecks sowie die andere Seite b kennen.

Antwort 4: Die Formel für den Umfang eines Rechtecks lautet:

$$U_R = 2(a + b).$$

Antwort 5: Wir gehen wie folgt vor:

$$\begin{array}{l|l} U_R = 2(a + b) & | \div 2 \\ \Rightarrow \frac{U_R}{2} = a + b & | - b \\ \Rightarrow a = \frac{U_R}{2} - b & \end{array}$$

Diese Gleichung können wir benutzen, um die Seite a zu berechnen, wenn wir den Umfang des Rechtecks sowie die andere Seite b kennen.

Antwort 6: Sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gegeben (siehe Abb. 2). Der Satz von Pythagoras lautet dann:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Antwort 7: Die Seiten a , b und die Diagonale d bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse d . Nach Pythagoras gilt also

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

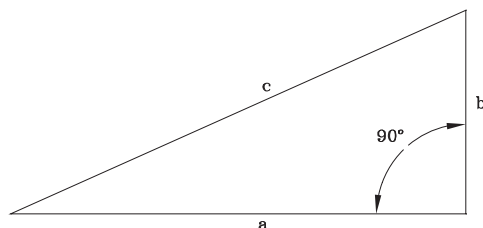


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck

Wenn wir nun auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen, ergibt sich

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Antwort 8: Die Seiten a, b und die Diagonale d bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse d . Nach Pythagoras gilt also

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 && | - b^2 \\ \Rightarrow a^2 &= d^2 - b^2 && | \text{Wurzel ziehen} \\ \Rightarrow a &= \sqrt{d^2 - b^2} \end{aligned}$$

Antwort 9: Es gilt:

-
-
-

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$U_R = 2(a + b) = 2(3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$F_R = ab = 3 \cdot 4 = 12$$

Antwort 10: Wir kennen ja die Formel $F_R = ab$, möchten aber b berechnen. Also lösen wir die Formel nach b auf, indem wir durch a dividieren und wir erhalten

$$b = \frac{F_R}{a} = \frac{6}{2} = 3.$$

Nun folgt für den Umfang

$$U_R = 2(a + b) = 2(2 + 3) = 2 \cdot 5 = 10$$

und für die Diagonale

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3.61.$$

Antwort 11: Wir kennen ja die Formel $U_R = 2(a + b)$, möchten aber b berechnen. Also lösen wir die Formel nach b :

$$\begin{aligned} U_R &= 2(a + b) && | \div 2 \\ \Rightarrow \frac{U_R}{2} &= a + b && | - a \\ \Rightarrow b &= \frac{U_R}{2} - a = \frac{8}{2} - 1 = 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Nun folgt für die Fläche

$$F_R = ab = 1 \cdot 3 = 3$$

und für die Diagonale

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2.$$

Antwort 12: In einem Quadrat sind ja alle Seiten gleichlang, d.h.

$$b = a = 2.$$

Nun folgt für die Fläche

$$F_R = ab = a^2 = 2^2 = 4$$

und für den Umfang

$$U_R = 2(a + b) = 2(a + a) = 4a = 8$$

sowie für die Diagonale

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Antwort 13: In einem Quadrat gilt ja $a = b$. D.h. $F_R = a^2$ und somit $a = \sqrt{F_R}$. Damit folgt

$$a = \sqrt{F_R} = \sqrt{25} = 5.$$

Antwort 14: In einem Quadrat gilt ja $a = b$. D.h. $U_R = 2(a + a) = 4a$ und somit $a = U_R/4$. Damit folgt

$$a = U_R/4 = 24/4 = 6.$$

1.2.2 Dreieck

Antwort 15: Bei einem Dreieck interessieren uns vor allem folgende Größen (siehe dazu Abb. 3) :

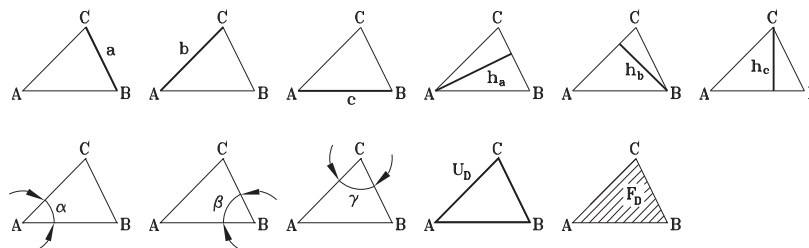


Abbildung 3: Interessante Größen in einem Dreieck

- die Seiten a, b, c
- die die Höhen h_a, h_b, h_c
- die die Winkel α, β, γ
- der Umfang U_D
- die Fläche F_D

Antwort 16: Zur Berechnung einer Dreiecksfläche benötigen wir eine Seite sowie die dazugehörige Höhe. Die Formeln lauten:

$$F_D = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Dass diese Formel stimmt, können wir uns leicht überlegen. Betrachten wir dazu ein Dreieck mit der Grundlinie c und der Höhe h_c (siehe Abb. 4 links). Wenn wir dieses Dreieck wie in Abb. 4 Mitte zu einem Rechteck ergänzen, sehen wir, dass die Fläche der Rechtecks gerade gleich ch_c ist. Wie in Abb. 4 rechts

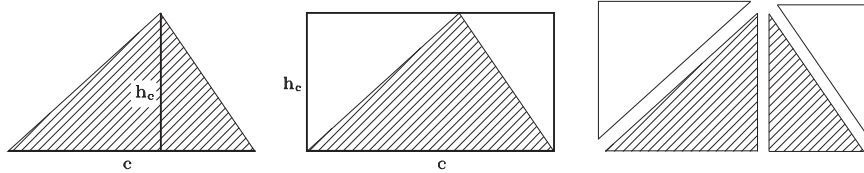


Abbildung 4: Dreiecksfläche

angedeutet, können wir das Rechteck nun in vier Dreiecke aufteilen, wobei ein jeweils ein Schraffiertes gerade gleich groß ist wie ein Unschraffiertes. D.h. die Schraffierte Fläche ist gerade halb so groß wie die des ganzen Rechtecks.

Antwort 17: Lösen wir also die Gleichung nach h_c auf:

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{ch_c}{2} && | \div c \\ \Rightarrow \frac{F_D}{c} &= \frac{h_c}{2} && | \cdot 2 \\ \Rightarrow h_c &= 2 \frac{F_D}{c}. \end{aligned}$$

Diese Formel können wir benützen, um die Höhe h_c eines Dreiecks zu berechnen, wenn wir die Fläche F_D und die Seite c kennen.

Antwort 18: Man benötigt die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks und die Formel lautet natürlich:

$$U_D = a + b + c.$$

Antwort 19: Lösen wir also die Gleichung nach a auf:

$$\begin{aligned} U_D &= a + b + c && | - b - c \\ \Rightarrow a &= U_D - a - b. \end{aligned}$$

Diese Formel können wir benützen, um die Seite a eines Dreiecks zu berechnen, wenn wir den Umfang U_D sowie die Seiten b und c kennen.

Antwort 20: In einem Dreieck mit den Winkeln α, β, γ gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Antwort 21: Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang.

Antwort 22: Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang.

Antwort 23: Bei einem gleichseitigen Dreieck sind nicht nur alle Seiten gleich lang, sondern natürlich auch alle Winkel gleich groß, $\alpha = \beta = \gamma$. Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ folgt somit $3\alpha = 180^\circ$, also $\alpha = 180^\circ/3 = 60^\circ$.

Antwort 24: Wenn wir uns ein solches Dreieck skizzieren (Abb. 5), sieht man sofort, dass $\alpha = \beta$ gelten muss. Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ folgt somit

$$\alpha = \beta = \frac{180^\circ - \gamma}{2}.$$

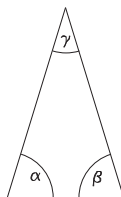


Abbildung 5: Gleichschenkliges Dreieck

Antwort 25: Der Satz von Pythagoras kann nur bei rechtwinkligen Dreiecken angewendet werden.

Antwort 26: Betrachten wir also ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen a . In Abb. 6 sehen wir, dass wenn wir in unser Dreieck die Höhe einzeichnen, zwei rechtwinklige Dreiecke entstehen. Wenn wir dann ein solches rechtwinkliges Dreieck genauer betrachten, sieht man, dass dessen Hypotenuse gerade a ist, die eine Kathete ist $a/2$ lang und die andere Kathete ist gerade die gesuchte Höhe h . Mit Pythagoras folgt somit:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Die Höhen in einem gleichseitigen Dreieck sind natürlich alle gleich lang.

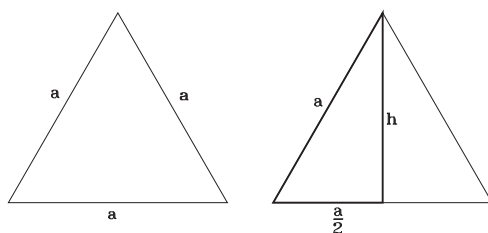


Abbildung 6: Gleichseitiges Dreieck

Antwort 27: Wir haben die Formel für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks hergeleitet. Setzen wir also $a = 2$ ein, folgt somit:

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Antwort 28: In einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang, also ergibt sich für den Umfang

$$U_D = 3a.$$

Antwort 29: Da in einem gleichseitigen Dreieck alle Seiten gleich lang sind, gilt $U_D = 3a$ und somit

$$a = b = c = \frac{U_D}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Für die Höhen in einem gleichseitigen Dreieck haben wir oben die Formel $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ hergeleitet, also gilt:

$$h_c = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Die Fläche berechnet sich bekanntlich wie folgt:

$$F_D = \frac{ch_c}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Antwort 30: Betrachten wir also ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seitenlängen $a = b$ und c . In Abb. 7 sehen wir, dass wenn wir in unser Dreieck die Höhe h_c einzeichnen, zwei rechtwinklige Dreiecke entstehen. Wenn wir dann ein solches rechtwinkliges Dreieck genauer betrachten, sieht man, dass dessen Hypotenuse gerade a ist, die eine Kathete ist $c/2$ lang und die andere Kathete ist gerade die gesuchte Höhe h_c . Mit Pythagoras folgt somit:

$$h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

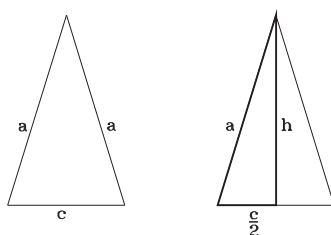


Abbildung 7: Gleichschenkliges Dreieck

Antwort 31: Wir wissen $a = b$ und $U_D = a + b + c$. Damit folgt

$$a = \frac{U_D - c}{2} = \frac{14 - 6}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Nun haben wir oben eine Formel für die Höhe h_c hergeleitet und es gilt:

$$h_c = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{4^2 - \frac{6^2}{4}} = \sqrt{16 - \frac{36}{4}} = \sqrt{5} \approx 2.24.$$

Damit berechnen wir nun leicht die Fläche

$$F_D = \frac{ch_c}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} \approx 6.71.$$

Antwort 32: Wir kennen ja die Formel

$$F_D = \frac{ch_c}{2}.$$

Lösen wir nun diese Formel also nach c auf:

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{ch_c}{2} && | \cdot 2 \\ \Rightarrow 2F_D &= ch_c && | \div h_c \\ \Rightarrow c &= \frac{2F_D}{h_c} = \frac{2 \cdot 12}{3} = \frac{24}{3} = 8. \end{aligned}$$

1.2.3 Kreis

Antwort 33: Bei einem Kreis interessieren uns vor allem folgende Größen (siehe dazu Abb. 8) :

- der Radius r
- der Durchmesser d
- der Umfang U_K
- die Fläche F_K

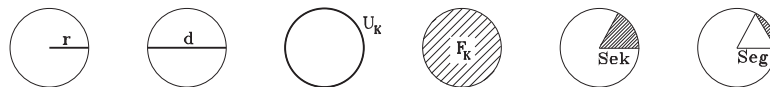


Abbildung 8: Interessante Größen in einem Kreis

- alle Größen eines Sektors (Genauerer dazu später)
- alle Größen eines Segments (Genauerer dazu später)

Antwort 34: Natürlich ist der Radius gerade halb so lang wie der Durchmesser eines Kreises, also

$$d = 2r$$

Antwort 35: π ist eine irrationale Zahl und es gilt

$$\pi \approx 3.14159265359.$$

Häufig benutzte Näherungen sind $\pi \approx 3.14$ und $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Antwort 36: Um die Fläche F_K eines Kreises zu berechnen, benötigen wir den Radius r . Die Formel lautet

$$F_K = \pi r^2.$$

Antwort 37: Lösen wir also die Gleichung nach r auf:

$$\begin{aligned} F_K &= \pi r^2 && | \div \pi \\ \Rightarrow \frac{F_K}{\pi} &= r^2 && | \text{Wurzel ziehen} \\ \Rightarrow r &= \sqrt{\frac{F_K}{\pi}}. \end{aligned}$$

Diese Formel können wir benutzen, um den Radius r eines Kreises zu berechnen, dessen Fläche F_K wir kennen.

Antwort 38: Um den Umfang U_K eines Kreises zu berechnen, benötigen wir den Radius r . Die Formel lautet

$$U_K = 2\pi r.$$

Antwort 39: Lösen wir also die Gleichung nach r auf:

$$\begin{aligned} U_K &= 2\pi r && | \div 2\pi \\ \Rightarrow r &= \frac{U_K}{2\pi} \end{aligned}$$

Diese Formel können wir benutzen, um den Radius r eines Kreises zu berechnen, dessen Umfang U_K wir kennen.

Antwort 40: Wir wenden obige Formeln an und erhalten für den Umfang

$$U_K = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \approx 6.28$$

sowie für die Fläche

$$F_K = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \approx 3.14.$$

Antwort 41: Wir wenden obige Formeln an und erhalten für den Umfang

$$U_K = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12.57$$

sowie für die Fläche

$$F_K = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \approx 12.57.$$

Antwort 42: Der Sektor eines Kreises können wir uns als Kuchenstück einer runden Torte vorstellen. Die wichtigsten Größen eines Sektors sind unten aufgeführt (siehe auch Abb. 9):

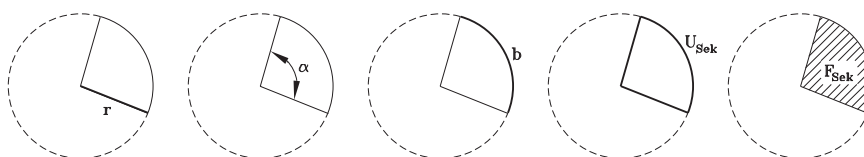


Abbildung 9: Interessante Größen eines Sektors

- der Radius r
- der Zentriwinkel α
- die Länge des Bogens b
- der Umfang U_{Sek}
- die Fläche F_{Sek}

Antwort 43: Man braucht den Radius r sowie den Zentriwinkel α . Versuchen wir nun die entsprechende Formel herzuleiten. Wohlbekannt ist uns ja die Formel für die Bogenlänge eines Sektors mit einem Zentriwinkel von 360° , denn das ist ja gerade der Umfang des Kreises $U_K = 2\pi r$. Nun passt ein Bogenstück genau soviel mal in den ganzen Umfang hinein, wie der zugehörige Zentriwinkel in 360° Platz hat. Das heißt es muss gelten

$$\frac{U_K}{b} = \frac{360^\circ}{\alpha}.$$

Ersetzen wir nun U_K durch $2\pi r$ und lösen die Gleichung nach b auf:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r}{b} &= \frac{360^\circ}{\alpha} && | \cdot b \\ \Rightarrow 2\pi r &= \frac{360^\circ \cdot b}{\alpha} && | \cdot \alpha \\ \Rightarrow 2\pi r \cdot \alpha &= 360^\circ \cdot b && | \div 360^\circ \\ \Rightarrow b &= \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}. \end{aligned}$$

Antwort 44: Man braucht den Radius r sowie den Zentriwinkel α . Natürlich gilt für den Umfang

$$U_{Sek} = 2r + b.$$

Die Bogenlänge b haben wir oben schon berechnet. Ersetzen wir nun b durch $\pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$ folgt somit

$$U_{Sek} = 2r + \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}.$$

Antwort 45: Man braucht den Radius r sowie den Zentriwinkel α . Versuchen wir nun die entsprechende Formel herzuleiten. Wohlbekannt ist uns ja die Formel für die Fläche eines Sektors mit einem Zentriwinkel

von 360° , denn das ist ja gerade die Fläche des Kreises $F_K = \pi r^2$. Nun passt ein Sektor genau soviel mal in den ganzen Kreis hinein, wie der zugehörige Zentriwinkel in 360° Platz hat. Das heißt es muss gelten

$$\frac{F_K}{F_{Sek}} = \frac{360^\circ}{\alpha}.$$

Ersetzen wir nun F_K durch πr^2 und lösen die Gleichung nach F_{Sek} auf:

$$\begin{aligned} \frac{\pi r^2}{F_{Sek}} &= \frac{360^\circ}{\alpha} && | \cdot F_{Sek} \\ \Rightarrow \pi r^2 &= \frac{360^\circ \cdot F_{Sek}}{\alpha} && | \cdot \alpha \\ \Rightarrow \pi r^2 \cdot \alpha &= 360^\circ \cdot F_{Sek} && | \div 360^\circ \\ \Rightarrow F_{Sek} &= \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}. \end{aligned}$$

Antwort 46: Wir wenden die oben hergeleiteten Formeln an und erhalten somit für den Bogen

$$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \approx 0.79,$$

für den Umfang

$$U_{Sek} = 2r + \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} = 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \frac{45^\circ}{180^\circ} = 2 + \frac{\pi}{4} \approx 2.79$$

und für die Fläche

$$F_{Sek} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39.$$

Antwort 47: Ein Segment eines Kreises mit den dazugehörigen wichtigen Größen ist in Abb. 10 skizziert:

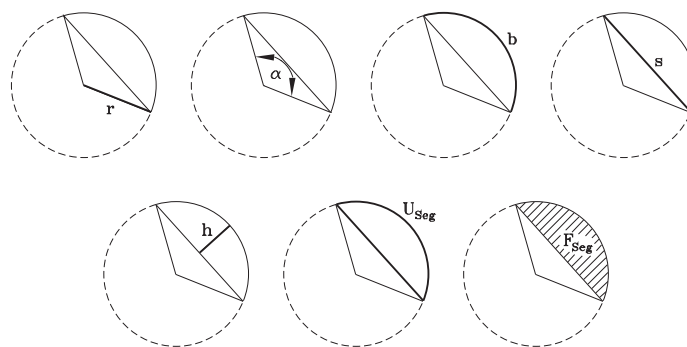


Abbildung 10: Interessante Größen eines Segments

- der Radius r
- der Zentriwinkel α
- die Länge des Bogens b
- die Breite s
- die Höhe h
- der Umfang U_{Sek}
- die Fläche F_{Sek}

Antwort 48: Die Antwort ist natürlich genau dieselbe wie beim Sektor. Man braucht den Radius r sowie den Zentriwinkel α . Versuchen wir nun die entsprechende Formel herzuleiten. Wohlbekannt ist uns ja die Formel für die Bogenlänge eines Sektors mit einem Zentriwinkel von 360° , denn das ist ja gerade der Umfang des Kreises $U_K = 2\pi r$. Nun passt ein Bogenstück genau soviel mal in den ganzen Umfang hinein, wie der zugehörige Zentriwinkel in 360° Platz hat. Das heißt es muss gelten

$$\frac{U_K}{b} = \frac{360^\circ}{\alpha}.$$

Ersetzen wir nun U_K durch $2\pi r$ und lösen die Gleichung nach b auf:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r}{b} &= \frac{360^\circ}{\alpha} && | \cdot b \\ \Rightarrow 2\pi r &= \frac{360^\circ \cdot b}{\alpha} && | \cdot \alpha \\ \Rightarrow 2\pi r \cdot \alpha &= 360^\circ \cdot b && | \div 360^\circ \\ \Rightarrow b &= \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}. \end{aligned}$$

Antwort 49: Betrachten wir uns die die Situation einmal in einer Skizze (siehe Abb. 11). Wir sehen,

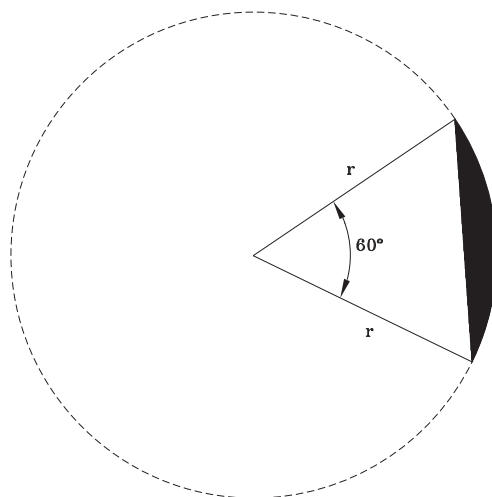


Abbildung 11: Kreis-Segment

dass das Dreieck, welches das Segment zu einem Sektor ergänzt, ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel 60° ist. Die anderen beiden Winkel müssen nun beide gleich groß sein und die Winkelsumme muss 180° sein. Daraus folgt, dass alle drei Winkel 60° sind. Das heißt, unser Dreieck ist ein gleichseitiges mit den Seitenlängen r .

Die Breite des Segments ist natürlich genau die Länge der Dreiecksseite, also

$$s = r = 1.$$

Die Höhe ergibt sich als Differenz zwischen r und der Höhe des Dreiecks. Bei einem gleichseitigen Dreieck haben wir die Höhe schon berechnet (siehe Abschnitt über Dreiecke). Es ergibt sich somit für die Segmenthöhe h :

$$h = r - \frac{\sqrt{3}r}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.13.$$

Die Länge des Bogens berechnen wir mit der oben hergeleiteten Formel:

$$b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \approx 1.05.$$

Der Umfang ergibt sich natürlich als Summe von Segmentbreite und der Länge des Bogens b :

$$U_{Seg} = s + b = 1 + \frac{\pi}{3} \approx 2.05.$$

Bleibt also noch die Fläche F_{Seg} zu berechnen. Wenn wir zuerst die Fläche des ganzen Sektors berechnen und dann die Fläche des Dreiecks abziehen, erhalten wir die Segmentfläche. Die Sektorfläche können wir mit der uns bekannten Formel (siehe Abschnitt über Sektoren) $F_{Sek} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ berechnen. Die Formel für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks berechnet sich natürlich auch leicht, da wir ja oben schon die Höhe berechnet haben und die Seiten ja alle r sind. Also $F_D = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$. Damit ergibt sich für die Segmentfläche

$$\begin{aligned} F_{Seg} &= F_{Sek} - F_D = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}r^2}{4} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3} \cdot 1^2}{4} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.09. \end{aligned}$$

1.2.4 Bogenmaß

Antwort 50: Das Bogenmaß ist einfach eine anderes Maß für einen Winkel. Anstatt den Winkel in Grad anzugeben, können wir ihn im Bogenmaß angeben und man kann selbstverständlich jeden Winkel vom Bogenmaß ins Gradmaß umrechnen. Wenn wir einen Winkel α im Bogenmaß angeben, schreiben wir arc_α . Der volle Winkel im Bogenmaß beträgt $\text{arc}_\alpha = 2\pi$.

Antwort 51: Sei arc_α ein Winkel im Bogenmaß gegeben. Um nun den Winkel im Gradmaß zu erhalten, benützt man folgende Formel:

$$\alpha = \text{arc}_\alpha \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Antwort 52: Sei α ein Winkel im Gradmaß gegeben. Um nun den Winkel im Bogenmaß zu erhalten, benützt man folgende Formel:

$$\text{arc}_\alpha = \alpha \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Antwort 53: Es ergeben sich folgende Resultate:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $47^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0.82$.

Antwort 54: Es ergeben sich folgende Resultate:

a) 180° b) 36° c) 360° d) $0.73 \frac{180^\circ}{\pi} \approx 41.86^\circ$ e) 90°

Antwort 55: Ein Vorteil des Bogenmaßes ist, dass sich die Formel für die Bogenlänge eines Bogens b über dem Zentriwinkel α stark vereinfacht:

$$b = b = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} = \pi r \cdot \frac{\text{arc}_\alpha \frac{180^\circ}{\pi}}{180^\circ} = r \cdot \text{arc}_\alpha.$$

Ein Nachteil hingegen ist, dass wir uns das Gradmaß so gewöhnt sind, dass wir uns einen Winkel von 80° ziemlich gut vorstellen können. Beim Bogenmaß geht das wesentlich weniger gut.

Antwort 56: Wir verwenden einfach obige Formel und erhalten

$$b = r \cdot \text{arc}_\alpha = 1 \cdot 2 = 2.$$

Antwort 57: Manchmal teilt man die Gradeinheit noch weiter auf und zwar in Bogenminuten und Bogensekunden. Ein Grad würde dann 60 Bogenminuten entsprechen, ein halbes Grad würde 30 Bogenminuten entsprechen usw.