Fragen und Antworten

Vektorgeometrie

(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorgeometrie im Raum

1.1 Fragen

1.1.1 Allgemeines

Frage 1: Was ist anschaulich ein Vektor, bzw. ein Ortsvektor?

Frage 2: Was ist ein Vektor im mathematischen Sinne, d.h. woraus besteht er und welche elementaren Operationen sind für Vektoren definiert?

Frage 3: Berechne folgende Ausdrücke:
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ **c)** $3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ **e)** $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ **f)** $\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}}{3}$

Frage 4: Wie addierst Du Vektoren grafisch?

Frage 5: Wie subtrahierst Du zwei Vektoren grafisch?

Frage 6: Was bedeutet die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl anschaulich?

Frage 7: Was bedeutet es anschaulich, wenn man einen Vektor durch eine Zahl dividiert?

Frage 8: Was ist der Unterschied zwischen Vektorgeometrie im Raum und Vektorgeometrie in der Ebene?

1.1.2 Geometrische Begriffe

Frage 9: Wie beschreiben wir einen Punkt im Raum?

Frage 10: Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Punkten und Vektoren?

Frage 11: Was verstehen wir unter der Länge eines Vektors und welche Notation benützen wir?

Frage 12: Wie berechnet man die Länge eines Vektors?

Frage 13: Wie schreibt man den Abstand zwischen zwei Punkten mit Hilfe der Vektorenschreibweise?

Frage 14: Was ist der Winkel zwischen zwei Vektoren?

Frage 15: Wann sagt man, dass zwei Vektoren normal zueinander sind?

1.1.3 Geraden

Frage 16: Was braucht man, damit eine Gerade im Raum genau bestimmt ist?

Frage 17: Wie prüfst Du, ob die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen?

Frage 18: Wie stellst Du eine Gerade mit Hilfe der Vektorschreibweise das und wie nennt man diese Darstellung?

Frage 19: Wie können zwei Geraden im Raum zueinander liegen?

Frage 20: Wie prüfst Du, ob zwei Geraden $g_1 : \vec{r} = \vec{a_1} + t\vec{b_1}$ und $g_2 : \vec{r} = \vec{a_2} + s\vec{b_2}$ parallel sind?

Frage 21: Wie prüft man, ob ein Punkt P auf einer Geraden $g : \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ liegt?

Frage 22: Wie prüfst Du, ob zwei Geraden $g_1 : \vec{r} = \vec{a_1} + t\vec{b_1}$ und $g_2 : \vec{r} = \vec{a_2} + s\vec{b_2}$ deckungsgleich sind?

Frage 23: Wie geht man vor, wenn man den Schnittpunkt von zwei Geraden $g_1 : \vec{r} = \vec{a_1} + t\vec{b_1}$ und $g_2 : \vec{r} = \vec{a_2} + s\vec{b_2}$ berechnen will?

Frage 24: Welchem mathematischen Problem entspricht das Finden des Schnittpunktes?

Frage 25: Wie prüfst Du, ob zwei Geraden $g_1 : \vec{r} = \vec{a_1} + t\vec{b_1}$ und $g_2 : \vec{r} = \vec{a_2} + s\vec{b_2}$ windschief sind?

Frage 26: Wie ist der Winkel zwischen zwei Geraden definiert?

Frage 27: Was sind die Spurpunkte einer Gerade?

1.1.4 Ebenen

Frage 28: Was braucht man, damit eine Ebene im Raum genau bestimmt ist?

Frage 29: Legen drei verschiedene Punkte in jedem Fall eine Ebene fest?

Frage 30: Wie stellst Du mit Hilfe der Vektorschreibweise eine Ebene dar und wie nennst Du diese Darstellung?

Frage 31: Wie sieht die zweite wichtige Darstellung für Ebenen im Raum aus und wie heißt diese?

Frage 32: Gibt es auch eine Koordinatengleichung für Geraden im Raum?

Frage 33: Wie berechnet man aus der Koordinatengleichung einer Ebene eine Parameterdarstellung?

Frage 34: Wie berechnet man aus der Parameterdarstellung einer Ebene die Koordinatengleichung?

Frage 35: Wie sieht die Koordinatengleichung der xy-Ebene aus?

Frage 36: Wie sieht die Koordinatengleichung einer Ebene aus, die parallel zur xy-Ebene ist und die den Punkt $P = (3/6/-2)$ enthält?

Frage 37: Wie sieht die Koordinatengleichung einer Ebene aus, die die z-Achse enthält sowie den Punkt $P = (1/1/1)$?

Frage 38: Was sind die Spurgeraden einer Ebene?

Frage 39: Was sind die Achsenabschnitte einer Ebene?

Frage 40: Was ist eine Achsenabschnittsgleichung und für welche Ebenen existiert eine solche?

Frage 41: Sei $x+\frac{3}{2}y+2z-2=0$ die Koordinatengleichung einer Ebene. Berechne die Achsenabschnitte und skizziere die Ebene.

Frage 42: Wie prüfst Du ob ein Punkt $P=(p_1/p_2/p_3)$ in einer Ebene liegt, falls
a) die Ebene durch eine Koordinatengleichung gegeben ist?
b) die Ebene durch eine Parameterdarstellung gegeben ist?

Frage 43: Wie kann eine Gerade zu einer Ebene liegen?

Frage 44: Wie gehst Du vor, wenn Du eine Ebene mit einer Geraden schneiden willst, falls
a) die Ebene in Parameterdarstellung gegeben ist?
b) die Ebene durch eine Koordinatengleichung gegeben ist?

Frage 45: Welchem mathematischen Problem entspricht das Finden des Schnittpunktes von einer Ebene mit einer Geraden?

Frage 46: Wie können zwei Ebenen zueinander liegen?

Frage 47: Was kann als Schnittmenge von zwei Ebenen herauskommen?

Frage 48: Wie siehst Du, ob zwei Ebenen $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ und $E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ gleich oder parallel sind, oder ob sie eine Schnittgerade haben?

Frage 49: Wie liegen die folgenden Ebenen zueinander?
a) $E_1: x+y+z+1=0$ und $E_2: -x-y-z-1=0$
b) $E_1: x+y+z+1=0$ und $E_2: -x-y-z=0$
c) $E_1: x+y+z+1=0$ und $E_2: x+y-z+1=0$
d) $E_1: 6x-2y+4z+1=0$ und $E_2: -3x+y-2z+1$
e) $E_1: 6x-2y+4z+4$ und $E_2: -3x+y-2z-2=0$

Frage 50: Wie gehst Du vor, wenn Du zwei Ebenen miteinander schneiden willst, falls
a) beide Ebenen durch eine Koordinatengleichung gegeben sind?
b) beide Ebenen durch eine Parameterdarstellung gegeben sind?
c) eine Ebene durch eine Koordinatengleichung, die andere mittels Parameterdarstellung gegeben ist?

Frage 51: Wie kannst Du die Ausrichtung einer Ebene mittels eines Vektors beschreiben?

Frage 52: Wie ist der Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden definiert?

Frage 53: Wie ist der Winkel zwischen zwei Ebenen definiert?

1.2 Antworten

1.2.1 Allgemeines

Antwort 1: Ein Ortsvektor $\vec{a}$ ist ein Pfeil, der vom Ursprung zu einem Punkt zeigt (Abb 1). Ein Vektor ist einfach ein Pfeil mit einer bestimmten Länge und einer bestimmten Richtung, d.h. im Gegensatz zum Ortsvektor ist er nicht an einen bestimmten Anfangspunkt gebunden.

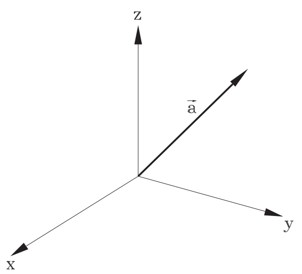

Abbildung 1: Ortsvektor

Antwort 2: Ein Vektor im mathematischen Sinne ist ein Objekt, das aus drei (in der Ebene aus zwei) reellen Zahlen besteht, wobei folgende Rechenregeln gelten müssen:

a) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

b) $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Antwort 3: Es ergeben sich folgende Resultate:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ 35 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Antwort 4: Man verschiebt den einen Vektor parallel, so dass dein Anfangspunkt an die Spitze des anderen zu liegen kommt. Verbindet man dann den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten, erhält man einen neuen Vektor, die Summe der zwei Vektoren(Abb. 2).

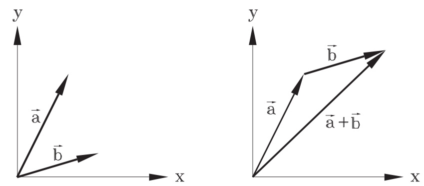

Abbildung 2: Addieren von zwei Vektoren

Antwort 5: Man verschiebt den zu subtrahierenden Vektor parallel, so dass seine Spitze auf die Spitze des anderen Vektors zu liegen kommt. Verbindet man nun den Anfangspunkt des nicht verschobenen Vektors mit dem Endpunkt des Verschobenen Vektors, erhält man einen neuen Vektor, die Differenz der zwei Vektoren (Abb. 3).

Antwort 6: Wenn wir einen Vektor mit einer Zahl λ multiplizieren, behält er seine Richtung bei, seine Länge wird aber um den Faktor $|\lambda|$ gestreckt. Falls λ negativ ist, wird er noch um 180 gedreht (Abb. 4).

Antwort 7: Wenn wir einen Vektor durch eine Zahl dividieren, ist das eine Multiplikation mit dem Kehrwert der Zahl.

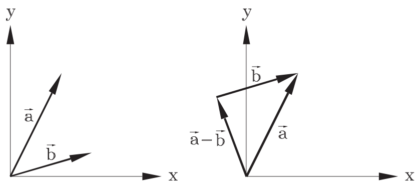

Abbildung 3: Subtrahieren von zwei Vektoren

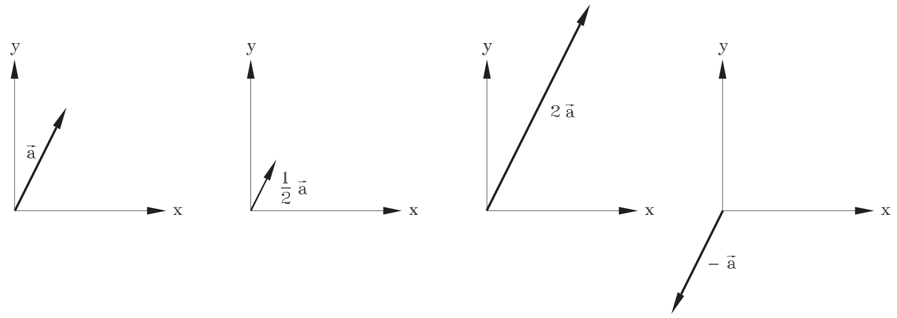

Abbildung 4: Multiplizieren eines Vektors mit einer Zahl

Antwort 8: Der Unterschied zwischen Vektorgeometrie in der Ebene besteht darin, dass ein Raumvektor aus drei Komponenten besteht, der in der Ebene jedoch nur aus zwei. Die Rechenregeln sind aber die selben.

1.2.2 Geometrische Begriffe

Antwort 9: Ein Punkt im Raum wird durch drei Zahlen beschrieben, die x-Koordinate, die y-Koordinate und die z-Koordinate. In der Abbildung 5 sehen wir einen Punkt $P = (p_1/p_2/p_3)$.

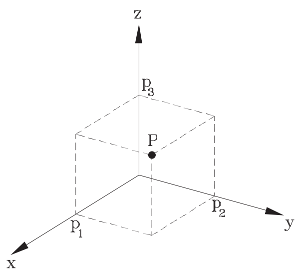

Abbildung 5: Punkt im Raum

Antwort 10: Wenn wir einen Punkt $P = (p_1/p_2/p_3)$ haben, zeigt die Spitze des Ortsvektors

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

gerade auf den Punkt P (Abb. 6).

Man kann also einen Ortsvektor als Punkt interpretieren oder umgekehrt. Wenn wir in Zukunft von einem

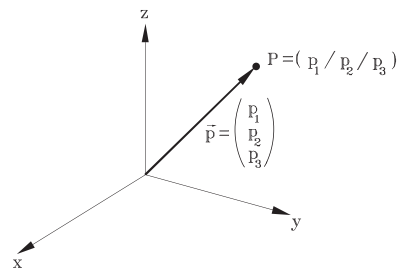

Abbildung 6: Zusammenhang zwischen Ortsvektor und Punkt

Punkt P sprechen, geben wir oft nur seinen Ortsvektor $\vec{p}$ an.

Antwort 11: Die Länge eines Vektors ist Geometrisch gesehen natürlich genau der Abstand zwischen seinem Anfangspunkt und seinem Endpunkt. Insbesondere ist die Länge nie negativ. Die Länge des Vektors $\vec{a}$ bezeichnen wir mit $|\vec{a}|$.

Antwort 12: Die Länge eines Vektors kann man mit Hilfe von Pythagoras berechnen und wir erhalten die folgende Formel:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Antwort 13: Seien A und B zwei Punkte sowie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die dazugehörigen Ortsvektoren. Der Abstand zwischen den Punkten A und B entspricht dann der Länge des Vektors, der von B nach A zeigt. Dieser Vektor ist aber genau der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ (Abb. 7). Der Abstand zwischen A und B ist also $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

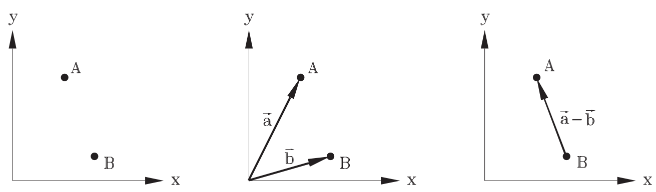

Abbildung 7: Abstand zwischen zwei Punkten

Antwort 14: Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann man ablesen, wenn man die zugehörigen Ortsvektoren betrachtet und dann den kleineren Winkel misst (Abb. 8). Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist also nie größer als 180.

Antwort 15: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind normal zueinander, falls der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau 90 beträgt.

1.2.3 Geraden

Antwort 16: Es gibt zwei übliche Arten, eine im Raum liegende Gerade anzugeben, nämlich
a) durch zwei verschiedene Punkte, die auf der Gerade liegen.
b) durch einen Punkt der Geraden, sowie deren Richtung.

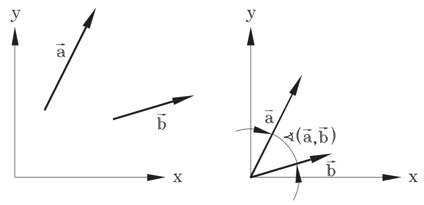

Abbildung 8: Winkel zwischen zwei Vektoren

Antwort 17: Drei Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden, falls die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ Vielfache voneinander sind.

Aufgabe 1: Seien drei Punkte $A = (2/3/4)\,, B = (3/3/3)\,, C = (0/3/6)$ gegeben. Liegen diese Punkte alle auf einer Geraden?

Lösung: Falls die drei Punkte auf derselben Geraden liegen, müssen die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ Vielfache voneinander sein. Wir berechnen also diese Vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist nun, gibt es eine Zahl λ, so dass $\vec{AB} = \lambda\vec{AC}$ gilt. Falls so ein λ existiert, folgt aus der Gleichung in der x-Komponenten

$$1 = -2\lambda,$$

also $\lambda = -\frac{1}{2}$. Nun müssen wir prüfen, ob dieses λ auch die Gleichungen in der y-Komponente und in der z-Komponente erfüllt. Die gilt aber offensichtlich. Die zwei Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind also Vielfache voneinander und die drei Punkte liegen also auf derselben Geraden.

Aufgabe 2: Seien drei Punkte $A = (2/3/4)\,, B = (3/3/3)\,, C = (0/3/4)$ gegeben. Liegen diese Punkte alle auf einer Geraden?

Lösung: Falls die drei Punkte auf derselben Geraden liegen, müssen die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ Vielfache voneinander sein. Wir berechnen also diese Vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Frage ist nun, gibt es eine Zahl λ, so dass $\vec{AB} = \lambda\vec{AC}$ gilt. Falls so ein λ existiert, folgt aus der Gleichung in der x-Komponenten

$$1 = -2\lambda,$$

also $\lambda = -\frac{1}{2}$. Nun müssen wir prüfen, ob dieses λ auch die Gleichungen in der y-Komponente und in der z-Komponente erfüllt. Die Gleichung in der z-Komponente stimmt aber nicht $(-1 = 0)$. Die zwei Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ sind also nicht Vielfache voneinander und die drei Punkte liegen deshalb nicht auf derselben Geraden.

Antwort 18: Wir wissen, dass eine Gerade durch einen Punkt und durch ihre Richtung gegeben ist. Ein Punkt entspricht aber einem Ortsvektor und eine Richtung kann man auch mit einem Vektor beschreiben. Sei also $\vec{a}$ ein Ortsvektor, der auf einen Punkt A der Geraden g zeigt und $\vec{b}$ ein zur Geraden g paralleler Vektor (Abb. 9). Sei nun P ein beliebiger Punkt auf der Geraden. Dann gibt es eine Zahl t, so dass $\vec{a} + t\vec{b}$ gerade der Ortsvektor von P ist.
Wir schreiben für eine Gerade g also:

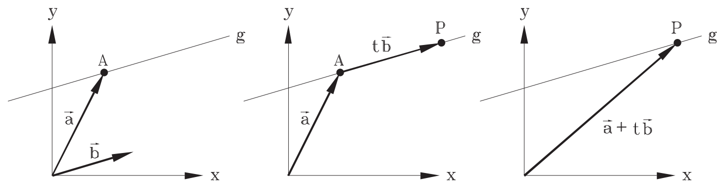

Abbildung 9: Parameterdarstellung einer Geraden

$$g : \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}.$$

Diese Darstellung nennt man auch die Parameterdarstellung der Geraden g.

Antwort 19: Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, wie zwei Geraden g und h im Raum zueinander liegen können (Abb. 10):
a) g und h sind gleich.
b) g und h sind parallel, aber nicht gleich.
c) g und h sind nicht parallel und haben einen Schnittpunkt S.
d) g und h sind nicht parallel und haben keinen Schnittpunkt. Man sagt, g und h sind windschief.

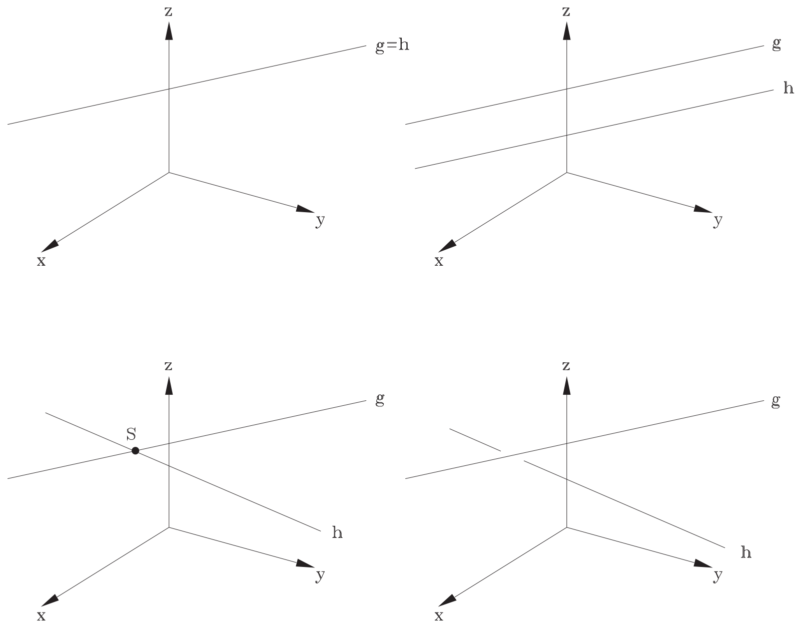

Abbildung 10: Lage von einer Geraden bezüglich einer zweiten Geraden

Antwort 20: Man prüft, ob die beiden Richtungsvektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ parallel sind, d.h. ist $\vec{b_1}$ ein Vielfaches von $\vec{b_2}$? Oder noch genauer, gibt es eine Zahl t, so dass gilt $t\vec{b_1} = \vec{b_2}$

Antwort 21: Sei $\vec{p}$ der Ortsvektor zum Punkt P. Falls P auf der Geraden liegt, muss es eine Zahl t geben, so dass gilt $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$. Man kann also mit der Gleichung in der x-Komponente (oder in einer anderen Komponente) t bestimmen und muss dann prüfen, ob die Gleichungen in den zwei anderen Komponenten auch noch erfüllt sind. Falls ja, liegt P auf der Geraden, sonst nicht.

Antwort 22: Um zu zeigen, dass zwei Geraden deckungsgleich sind, prüft man zuerst einmal, ob sie parallel sind. Ist die der Fall, muss man noch zeigen, dass die zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen. Wir können also schauen, ob $\vec{a_1}$ auf der Geraden g_2 liegt oder ob $\vec{a_2}$ auf g_1 liegt.

Antwort 23: Man setzt die beiden Parameterdarstellungen der gegebenen Geraden gleich, also $\vec{a_1}+t\vec{b_1} = \vec{a_2} + s\vec{b_2}$. In dieser Gleichung sind t und s die Unbekannten und da die Gleichung ja in allen drei Komponenten stimmen muss, ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Wir müssen dieses Gleichungssystem nun nach t und s auflösen. Dabei können drei verschiedene Fälle auftreten:
a) Es gibt genau eine Lösung, dann haben die Gerade einen Schnittpunkt.
b) Es gibt keine Lösung $(1 = 0)$, d.h. die Geraden haben keinen Schnittpunkt, sie sind also parallel aber nicht gleich oder windschief.
c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen $(0 = 0)$, dann sind die Geraden gleich.

Aufgabe 3: Seien zwei Geraden gegeben durch

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Schnittpunkt von g_1 und g_2.

Lösung: Da der Schnittpunkt P auf beiden Geraden liegen muss, setzen wir die beiden Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 gleich, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2s \\ t &= s \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $t = 1, s = 1$ die Lösungen dieses Gleichungssystems ist. D.h. wir haben genau einen Schnittpunkt und zwar in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Seien zwei Geraden gegeben durch

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Schnittpunkt von g_1 und g_2.

Lösung: Man sieht, dass die Geraden parallel sind und deshalb entweder gleich sind oder sonst keinen Schnittpunkt haben. Man müsste die folgende Rechnung also nicht machen, wir tun's hier aber trotzdem, um zu sehen was passiert.
Da der Schnittpunkt P auf beiden Geraden liegen muss, setzen wir die beiden Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 gleich, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1+t &= 2s \\ t &= 2s \\ t &= 1+2s. \end{aligned}$$

Ziehen wir die zweite Gleichung von der dritten ab, erhalten wir $1 = 0$, die Geraden können somit keinen Schnittpunkt haben.

Aufgabe 5: Seien zwei Geraden gegeben durch

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Schnittpunkt von g_1 und g_2.

Lösung: Man sieht, dass die Geraden parallel sind und deshalb entweder gleich sind oder sonst keinen Schnittpunkt haben. Man müsste die folgende Rechnung also nicht machen, wir tun's hier aber trotzdem, um zu sehen was passiert.
Da der Schnittpunkt P auf beiden Geraden liegen muss, setzen wir die beiden Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 gleich, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1+t &= 2+2s \\ t &= 1+2s \\ t &= 1+2s. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist für alle Paare t, s mit $t = 1 + 2s$ erfüllt und wir haben damit unendlich viele Lösungen. Die Geraden sind also gleich.

Antwort 24: Das Finden eines Schnittpunktes von zwei Geraden im Raum entspricht dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Antwort 25: Um zu zeigen, dass zwei Geraden windschief sind, zeigt man zuerst, dass die Geraden nicht parallel sind und prüft dann, dass die zwei Geraden keinen Schnittpunkt haben.

Antwort 26: Der Winkel zwischen zwei Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.

Antwort 27: Die Spurpunkte einer Geraden sind die Schnittpunkte der Geraden mit der xy-Ebene, der xz-Ebene und der yz-Ebene.

Aufgabe 6: Sei eine Gerade gegeben durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finde den ersten Spurpunkt, d.h den Punkt der Geraden, der in der xy-Ebene liegt.

Lösung: Da der gesuchte Punkt in der xy-Ebene liegt, wissen wir, dass seine z-Komponente Null sein muss. Da er aber auch auf der Geraden liegt, muss er auch die z-Komponente der Parameterdarstellung der Geraden erfüllen. Wir haben also die Gleichung

$$0 = 1 + 2t.$$

Das ergibt aber $t = -1/2$. Diesen Parameterwert können wir nun in die Parameterdarstellung einsetzen und wir erhalten dann

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der erste Spurpunkt ist also $S_1 = (1/0/0)$.

1.2.4 Ebenen

Antwort 28: Es gibt zwei übliche Arten, eine Ebene anzugeben, nämlich
a) durch drei verschiedene Punkte, die in der Ebene liegen (aber nicht auf einer Geraden).
b) durch einen Punkt auf der Ebene sowie deren "Ausrichtung".

Antwort 29: Drei Punkte legen nur dann eine Ebene fest, falls diese verschieden sind und nicht auf einer Geraden liegen.

Antwort 30: Wie wir aus der Geometrie in der Eben wissen, können wir jeden Punkt durch zwei Koordinaten angeben, das heisst wir geben an, wo liegt der Punkt in x-Richtung und wo in y-Richtung. Das heisst diese xy-Ebene ist durch zwei Richtungen festgelegt. Dasselbe können wir nun mit einer Ebene im Raum tun. Wir geben einfach zwei Richtungen durch zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an und wir haben dann die Ausrichtung der Ebene gegeben. Dazu müssen wir noch einen Punkt auf der Ebene angeben und zwar durch einen Ortsvektor $\vec{a}$. Jeder Punkt $\vec{p}$ der Ebene lässt sich nun schreiben als $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, wobei λ und μ zwei reelle Zahlen sind (siehe Abb. 11). Wir schreiben also für eine Ebene:

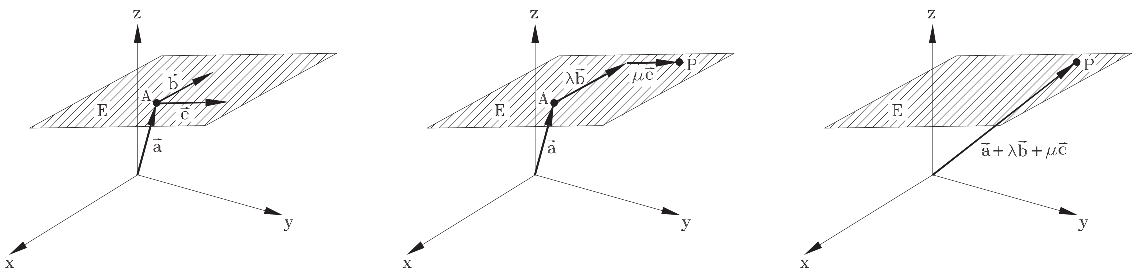

Abbildung 11: Ebene im Raum

$$E : \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c},$$

wobei λ und μ für zwei beliebige reelle Zahlen stehen, die Parameter eben. Deshalb wird diese Darstellung die Parameterdarstellung genannt.

Antwort 31: Eine weitere Darstellung für eine Ebene im Raum ist die Koordinatengleichung. Dies ist eine Gleichung mit drei Unbekannten, welche für die x-, y- und z-Werte der in der Ebene enthaltenen Punkte stehen. Eine Ebene ist durch eine Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

vollständig charakterisiert, wobei a, b, c, d feste reelle Zahlen sind.

Antwort 32: Nein, eine Koordinatengleichung im Raum gibt es nur für Ebenen. Für Geraden ist die Parameterdarstellung die einzige gebräuchliche Darstellung.
Dass eine Gerade keine Koordinatengleichung haben kann, sieht man leicht daran, dass wir in der Koordinatengleichung zwei Variablen frei wählen können, und die letzte Variable muss dann so gewählt werden, dass die Gleichung stimmt. Bei einer Gerade im Raum können wir aber nur eine Koordinate frei wählen und die anderen zwei sind jeweils dadurch bestimmt.

Antwort 33: Sei also eine Ebene durch ihre Koordinatengleichung

$$E : ax + by + cz + d = 0$$

gegeben, wobei mindestens einer der Koeffizienten a, b, c nicht Null ist. Nun wählen wir die Variable aus, deren Koeffizient nicht Null ist. Dann setzen wir für die anderen zwei Variablen jeweils die Wertepaare $(0,0), (1,0), (0,1)$ ein und berechnen jeweils den Wert der dritten Variable. So erhält man drei Punkte A, B, C. Durch die spezielle Wahl der Punkte sind wir sicher, dass $\vec{AB}$ kein Vielfaches von $\vec{AC}$ ist. Dadurch erhalten wir sofort die Parameterdarstellung für die Ebene

$$E : \vec{r} = \vec{0A} + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}.$$

Aufgabe 7:
Sei eine Ebene durch die Koordinatengleichung

$$E : x + y + z + 1 = 0$$

gegeben. Finde eine Parameterdarstellung für die Ebene E.

Lösung: Da in der Koordinatengleichung alle Variablen Koeffizienten ungleich Null haben, können, können wir für zwei beliebige Variablen die Wertepaare $(0,0), (1,0), (0,1)$ einsetzen, um drei Punkte der Ebene zu berechnen. Wählen wir also x und y. Setzen wir $x = 0, y = 0$ ein und lösen die Gleichung auf, so erhalten wir $z = -1$. Unser erster Punkt ist also $A = (0/0/-1)$. Mit $x = 1, y = 0$ erhalten wir $B = (1/0/-2)$ und aus $x = 0, y = 1$ folgt $C = (0/1/-2)$. Damit berechnet man sofort die Vektoren $\vec{0A}, \vec{AB}, \vec{AC}$ und es folgt

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Sei eine Ebene durch die Koordinatengleichung

$$E : x = 0$$

gegeben. Berechne eine Parameterdarstellung für E.

Lösung: Da nur die Variable x hat einen Koeffizienten ungleich Null hat, können wir nur für y und z beliebige Werte einsetzen. Um drei Punkte der Ebene zu erhalten, setzen wir also für y und z die Wertepaare $(0,0), (1,0), (0,1)$ ein. Setzen wir $y = 0, z = 0$ ein und lösen die Gleichung auf, so erhalten wir natürlich $x = 0$. Unser erster Punkt ist also $A = (0/0/0)$. Mit $y = 1, z = 0$ erhalten wir $B = (0/1/0)$ und aus $y = 0, z = 1$ folgt $C = (0/0/1)$. Damit berechnet man sofort die Vektoren $\vec{0A}, \vec{AB}, \vec{AC}$ und es folgt

$$E : \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Antwort 34: Sei also eine Ebene eine Parameterdarstellung

$$E : \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$$

gegeben. Wir haben damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 \\ y &= a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 \\ z &= a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3. \end{aligned}$$

Da $\vec{b}$ kein Vielfaches von $\vec{c}$ sein kann, gibt es sicher zwei Gleichungen, so dass dass das Koeffizientenpaar zu den Variablen λ und μ der ersten Gleichung kein Vielfaches desjenigen der zweiten Gleichung ist. Wähle diese zwei Gleichungen aus löse dieses Gleichungssystem nach λ und μ auf und setzte diese Ergebnisse in die dritte Gleichung ein. Dies ergibt dann genau die Koordinatengleichung für die Ebene.

Aufgabe 9: Sei die Ebene durch die Parameterdarstellung

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Finde eine Koordinatengleichung für E.

Lösung: Die Parameterdarstellung der Ebene E liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -1 - \lambda - \mu. \end{aligned}$$

Wir wählen nun zwei Gleichungen aus, um λ und μ zu berechnen. Da die Koeffizientenpaare der drei Gleichungen $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(-1, -1)$ jeweils nicht Vielfache voneinander sind, können wir zwei beliebige Gleichungen auswählen. Die erste und die zweite Gleichung ergeben ein besonders einfaches Gleichungssystem, da es nichts mehr zu berechnen gibt. Setzte also λ und μ in die dritte Gleichung ein und es folgt $z = -1 - x - y$. Bringen wir noch alles auf eine Seite folgt somit

$$x + y + z + 1 = 0.$$

Dies ist gerade die gesuchte Koordinatengleichung für die Ebene E.

Aufgabe 10: Sei eine Ebene durch die Parameterdarstellung

$$E : \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finde eine Koordinatengleichung für E.

Lösung: Die Parameterdarstellung von E liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \lambda \\ z &= \mu. \end{aligned}$$

Wir wählen nun zwei Gleichungen aus, um λ und μ zu berechnen. Da die Koeffizientenpaare der drei Gleichungen $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ lauten, müssen wir die zweite und die dritte Gleichung auswählen (da $(0,0)$ ein Vielfaches von $(1,0)$ und $(0,1)$ ist). Diese ergeben ein besonders einfaches Gleichungssystem, da es nichts mehr zu berechnen gibt. Setzte also λ und μ in die erste Gleichung ein und es folgt $x=0$. Dies ist natürlich gerade die Koordinatengleichung für die Ebene E.

Aufgabe 11: Sei die eine Ebene durch die Parameterdarstellung

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finde eine Parameterdarstellung für E.

Lösung: Die Parameterdarstellung von E liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= 1 - 2\lambda + 2\mu. \end{aligned}$$

Wir wählen nun zwei Gleichungen aus, um λ und μ zu berechnen. Da die Koeffizientenpaare der drei Gleichungen $(1,-1)$, $(1,0)$ und $(-2,2)$ lauten, dürfen wir nicht die erste mit der dritten Gleichung wählen (da $(1,-1)$ ein Vielfaches von $(-2,2)$ ist). Wählen wir also die erste und die zweite Gleichung aus. Wir erhalten somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \lambda - \mu \\ y &= \lambda. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der ersten Gleichung λ durch y erhalten wir $\mu = y - x$. Setzen wir nun λ und μ in die dritte Gleichung ein folgt $z = 1 - 2y + 2\,(y - x)$. Ausmultiplizieren und alles auf eine Seite bringen liefert somit die Lösung

$$2x + z - 1 = 0.$$

Antwort 35: Wir wissen, dass der Nullpunkt in der xy-Ebene liegt und deshalb in der Koordinatengleichung der Konstante Term Null sein muss. Die Koordinatengleichung hat somit die Form

$$ax + by + cz = 0.$$

Wir setzten nun drei beliebige Punkte, die in unserer Ebene, nicht aber auf einer Gerade liegen ein, z.B. $A = (1/0/0)$, $B = (0/1/0)$ und $C = (1/1/0)$. Wir erhalten damit ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} 0 &= a \\ 0 &= b \\ 0 &= a + b. \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung lautet also noch $cz = 0$. Es gilt sicher $c \neq 0$, da mindestens ein Koeffizient aus der Koordinatengleichung ungleich Null sin muss. Teilen wir also die Gleichung durch c und wir erhalten somit $z = 0$ und dies ist genau die Koordinatengleichung für die xy-Ebene.
Man hätte sich dies auch einfach ohne zu rechnen überlegen können, denn jeder Punkt, dessen z-Koordinate Null ist, liegt in der xy-Ebene. Die einzige Bedingung lautet also $z = 0$.

Antwort 36: Der Nullpunkt liegt sicherlich nicht in der gegebenen Ebene. Das heißt, unsere Koordinatengleichung ist von der Form

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

denn wenn der konstante Term ungleich Null ist, können wir die ganze Gleichung durch ihn dividieren und in der neuen Gleichung ist dann der konstante Term 1. Wir können nun drei beliebige Punkte der Ebene, die nicht auf einer Gerade liegen in die Gleichung einsetzten. Nehmen wir z.B. $A = (1/0/-2)$, $B = (0/1/-2)$ und $C = (1/1/-2)$ (einzige Bedingung ist ja $z = -2$). Wir erhalten somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= a - 2c + 1 \\ 0 &= b - 2c + 1 \\ 0 &= a + b - 2c + 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt $a = b = 2c - 1$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, erhalten wir $0 = 2c - 1 + 2c - 1 - 2c + 1$, also $c = 0.5$ und $a = b = 0$. Die Koordinatengleichung lautet also $0.5z + 1 = 0$. Multiplizieren wir noch mit 2 ergibt sich $z = -2$. Die hätte man auch ohne Rechnen sofort hinschreiben können.

Antwort 37: Wir versuchen dies nun ohne rechnen, einfach mit überlegen zu lösen. Wenn wir uns überlegen, wie die Ebene im Raum liegen muss, können wir sofort eine aussagekräftige Skizze (Abb. 12) erstellen. Sei nun $P = (x/y/z)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Man sieht, dass die z-Koordinate des

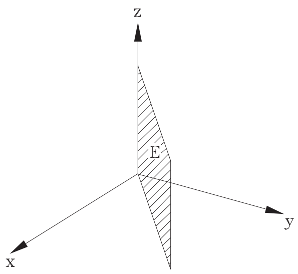

Abbildung 12: Ebene, welche parallel zu einer Koordinatenachse ist

Punktes völlig unabhängig ist von den zwei restlichen Koordinaten. Dies gilt, da ja die Ebene parallel zur z-Achse ist. Für die Koordinatengleichung bedeutet das, dass die Variable z nicht darin vorkommen darf, genauer gesagt, sie hat den Koeffizienten Null. Nun müssen wir noch schauen, in welcher Abhängigkeit x und y zueinander stehen. Es ist leicht einzusehen, dass $x = y$ gelten muss. Dies ist dann auch genau die Koordinatengleichung der Ebene.

Antwort 38: Die Spuren einer Ebene (Abb. 13) sind die die Geraden, die entstehen, wenn man die Ebene mit der xy-Ebene, der xz-Ebene oder der yz-Ebene schneidet.

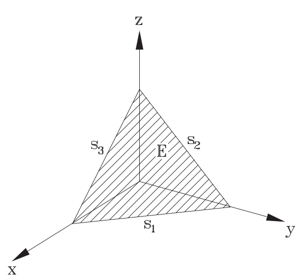

Abbildung 13: Spurgeraden einer Ebene

Falls eine Ebene Parallel zur xy-Ebene, der xz-Ebene oder der yz-Ebene ist gibt es keine entsprechende

Spurgerade. In Abbildung 14 ist zum Beispiel die Ebene parallel zur xy-Ebene und die erste Spur entfällt somit.

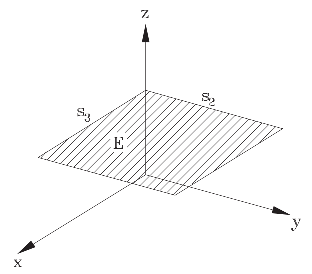

Abbildung 14: Ebene, die nur zwei Spurgeraden besitzt

Antwort 39: Schneiden wir eine Ebene mit den Koordinatenachsen und entstehen dabei eindeutige Schnittpunkte, so sind die Schnittpunkte von der folgenden Form: $A = (a/0/0)$, $B = (0/b/0)$ und $C = (0/0/c)$ (Abb. 15). Die Werte a, b, c nennen wir dann die Achsenabschnitte der Ebene.

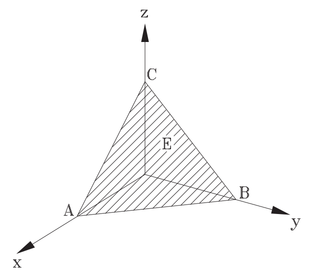

Abbildung 15: Achsenabschnitte einer Ebene

Falls der Nullpunkt in der Ebene enthalten ist, so sind die Achsenabschnitte alle gleich Null. Einige weitere Spezialfälle, wo wir nur einen oder zwei Achsenabschnitte haben sind im folgenden skizziert (Abb. 16).

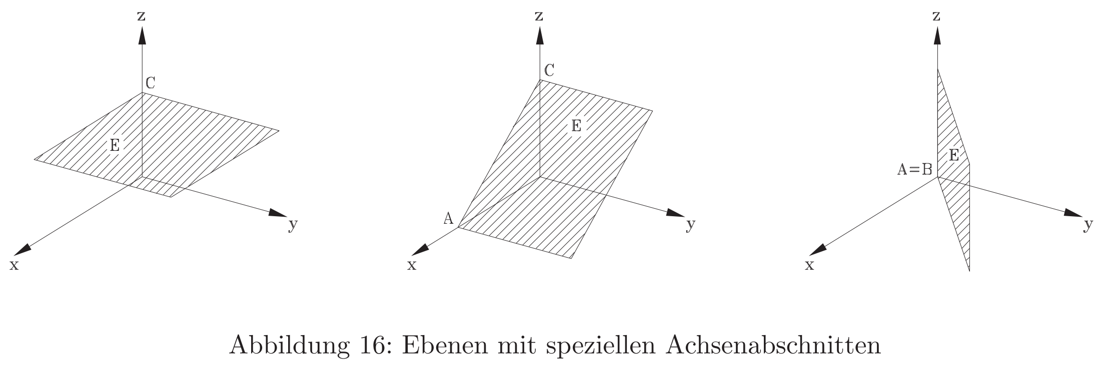

Abbildung 16: Ebenen mit speziellen Achsenabschnitten

Antwort 40: Die Achsenabschnittsgleichung einer Ebene ist eine spezielle Form der Koordinatengleichung, nämlich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Falls eine Ebene diese Koordinatengleichung besitzt, so sind die Zahlen a, b, c gerade ihre Achsenabschnitte.

Dass dies in der Tat so ist, sieht man natürlich sofort, wenn wir die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen in die Koordinatengleichung einsetzten.
Die Achsenabschnittsgleichung existiert genau dann, wenn die Ebene eindeutige Achsenabschnitte hat, die nicht gleich Null sind.

Antwort 41: Wir müssen den konstanten Term Koordinatengleichung auf die rechte Seite bringen und die Gleichung dann durch diesen dividieren.

$$
\begin{aligned}
& x+\frac{2}{3}y+2z-2=0 \\
\Rightarrow \quad & x+\frac{2}{3}y+2z=2 \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{2}x+\frac{2}{6}y+z=1 \\
\Rightarrow \quad & \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1
\end{aligned}
$$

Die Achsenabschnitte lauten also $a=2, b=3, c=1$. Daraus ergibt sich die Skizze in Abbildung 17.

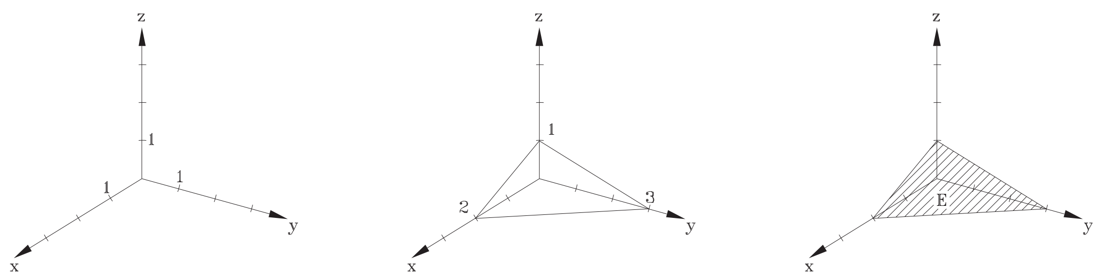

Abbildung 17: Ebene mit Hilfe von Achsenabschnitten skizzieren

Antwort 42:
a) Wir setzten dir Koordinaten des Punktes P in die Koordinatengleichung ein und prüfen, ob diese stimmt. Die zu prüfende Gleichung lautet also $ap_1+bp_2+cp_3+d \stackrel{?}{=} 0$.
b) Wir setzen den Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes P mit der Parameterdarstellung der Ebene gleich und erhalten somit die Gleichung $\vec{p} \stackrel{?}{=} \vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$. Diese entspricht dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a_1+\lambda b_1+\mu c_1 \\
p_2 &= a_2+\lambda b_2+\mu c_2 \\
p_3 &= a_3+\lambda b_3+\mu c_3.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen mit Hilfe von zwei Gleichungen λ und μ und setzen diese zur Überprüfung in die dritte Gleichung ein. Falls diese stimmt, liegt der Punkt P in der Ebene.

Antwort 43: Es gibt drei bedeutende Möglichkeiten, wie eine Gerade zu einer Ebene liegen kann (Abb. 18):
a) Die Gerade ist parallel zur Ebene und liegt in der Ebene drin.
b) Die ist parallel zur Ebene, liegt aber nicht in der Ebene drin.
c) Die Gerade ist nicht parallel zur Ebene und hat genau einen Schnittpunkt.

Antwort 44:
a) Man setzt dir Parameterdarstellung der Geraden mit jener der Ebene gleich: $\vec{a}+\alpha\vec{b}=\vec{c}+\lambda\vec{d}+\mu\vec{e}$.

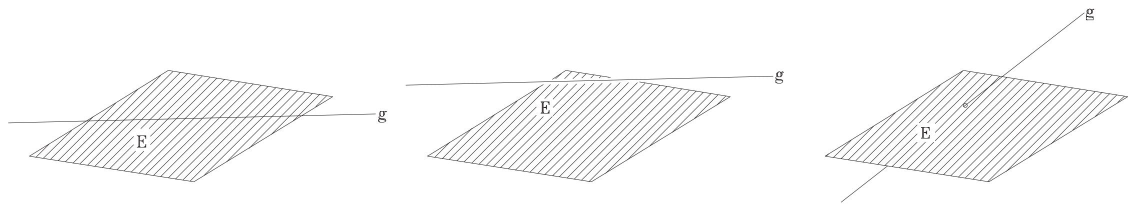

Abbildung 18: Mögliche Lagen von einer Gerade zu einer Ebene

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 + \alpha b_1 &= c_1 + \lambda d_1 + \mu e_1 \\ a_2 + \alpha b_2 &= c_2 + \lambda d_2 + \mu e_2 \\ a_3 + \alpha b_3 &= c_3 + \lambda d_3 + \mu e_3. \end{aligned}$$

Nun lösen wir das Gleichungssystem auf. Falls wir eine eindeutige Lösung erhalten, können wir α in die Parameterdarstellung der Geraden einsetzen und erhalten damit den Ortsvektor des Schnittpunktes. Falls das Gleichungssystem keine Lösung hat, liegt die Gerade parallel zur Ebene, aber nicht in der Ebene drin. Falls das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, liegt die Gerade in der Ebene drin.
b) Wir suchen einen Punkt P, der sowohl auf der Gerade als auch auf der Ebene liegt. Es muss also gelten

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

und

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0.$$

Wir ersetzen nun in der Koordinatengleichung p_1, p_2, p_3 durch $a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, a_3 + \lambda b_3$ und erhalten somit die Gleichung

$$a\,(a_1 + \lambda b_1) + b\,(a_2 + \lambda b_2) + c\,(a_3 + \lambda b_3) + d = 0.$$

Das ist eine Gleichung mit einer Unbekannten. Falls die Gleichung genau eine Lösung hat, gibt es genau einen Schnittpunkt. Man erhält diesen, indem man die Lösung in die Parameterdarstellung der Geraden einsetzt. Falls die Gleichung keine Lösung hat, ist die Gerade parallel zur Ebene, nicht aber in der Ebene drin. Und falls die Gleichung für jedes λ erfüllt ist, also unendlich viele Lösungen hat, liegt die Gerade in der Ebene drin.

Aufgabe 12: Sei eine Ebene gegeben durch

$$E : \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finde den Schnittpunkt von E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Ebene und der Gerade erfüllen muss, können wir die Parameterdarstellungen von E und g gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was dem folgendem Gleichungssystem entspricht

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda + \mu \\ 0 &= \lambda \\ t &= \mu. \end{aligned}$$

Es folgt sofort, $t = 1, \lambda = 0, \mu = 1$. Wir können nun t in die Parameterdarstellung der Geraden (oder λ und μ in jene der Ebene) einsetzen und erhalten somit den Ortsvektor des Schnittpunktes P:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

.

Aufgabe 13: Sei eine Ebene gegeben durch

$$E : \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Schnittpunkt von E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Ebene und der Gerade erfüllen muss, können wir die Parameterdarstellungen von E und g gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was dem folgendem Gleichungssystem entspricht

$$\begin{aligned} 1 + t &= \lambda + \mu \\ 3t &= \lambda \\ -2t &= \mu. \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Gleichung liefern sofort λ und μ. Setzen wir diese nun in die erste Gleichung ein, folgt $1+t = 3t-2t$. Rechnen wir dies nun aus, ergibt sich $1 = 0$, was bedeutet, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat und die Gerade somit die Ebene nicht schneidet.

Aufgabe 14: Sei eine Ebene gegeben durch

$$E : \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Schnittpunkt von E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Ebene und der Gerade erfüllen muss, können wir die Parameterdarstellungen von E und g gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was dem folgendem Gleichungssystem entspricht

$$\begin{aligned} 2+t &= \lambda+\mu \\ 1+3t &= \lambda \\ 1-2t &= \mu. \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Gleichung liefern sofort λ und μ. Setzen wir diese nun in die erste Gleichung ein, folgt $2+t = 1+3t+1-2t$. Rechnen wir dies nun aus, ergibt sich $0 = 0$, was bedeutet, dass das Gleichungssystem für jeden Wert für t erfüllt ist. D.h. jeder Punkt der Gerade g ist ein Schnittpunkt mit der Ebene E. Die Gerade liegt somit in der Ebene drin.

Aufgabe 15: Sei eine Ebene gegeben durch die Koordinatengleichung

$$E : x - y - z = 0$$

und die Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Schnittpunkt zwischen E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Gerade erfüllen muss, erhalten wir für seine Komponenten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= t. \end{aligned}$$

Weiter müssen die Komponenten des Schnittpunktes aber auch die Koordinatengleichung der Ebene erfüllen. Wir können also die Komponenten aus der Parameterdarstellung von g in die Koordinatengleichung von E einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$1 - t = 0.$$

Es folgt also $t = 1$. Der Punkt auf der Gerade mit dem Parameterwert $t = 1$ ist also der gesuchte Schnittpunkt. Der Ortsvektor für den Schnittpunkt lautet also

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16: Sei eine Ebene gegeben durch die Koordinatengleichung

$$E : x - y - z = 0$$

und eine Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Finde den Schnittpunkt von E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Gerade erfüllen muss, erhalten wir für seine Komponenten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 3t \\ z &= -2t. \end{aligned}$$

Weiter müssen die Komponenten des Schnittpunktes aber auch die Koordinatengleichung der Ebene erfüllen. Wir können also die Komponenten aus der Parameterdarstellung von g in die Koordinatengleichung von E einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$1 + t - 3t + 2t = 0.$$

Es folgt also $1 = 0$, was bedeutet, dass kein kein Punkt sowohl die Parametergleichung von g als auch die Koordinatengleichung von E erfüllt. Es gibt also keinen Schnittpunkt zwischen E und g.

Aufgabe 17: Sei die Ebene gegeben durch die Koordinatengleichung

$$E : x - y - z = 0$$

und eine Gerade durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Schnittpunkt zwischen E und g.

Lösung: Da der Ortsvektor eines Schnittpunktes die Parameterdarstellung der Gerade erfüllen muss, erhalten wir für seine Komponenten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 + 3t \\ z &= 1 - 2t. \end{aligned}$$

Weiter müssen die Komponenten des Schnittpunktes aber auch die Koordinatengleichung der Ebene erfüllen. Wir können also die Komponenten aus der Parameterdarstellung von g in die Koordinatengleichung von E einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$2 + t - 1 - 3t - 1 + 2t = 0.$$

Es folgt also $0 = 0$, was bedeutet, dass das Gleichungssystem für jeden Wert für t erfüllt ist. D.h. jeder Punkt der Gerade g ist ein Schnittpunkt mit der Ebene E. Die Gerade liegt somit in der Ebene drin.

Antwort 45: Das Finden eines Schnittpunktes von einer Geraden und einer Ebene, welche durch eine Parameterdarstellung gegeben ist, entspricht dem Lösen eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Falls die Ebene durch die Koordinatengleichung gegeben ist, entspricht es dem Lösen einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Antwort 46: Es gibt drei bedeutende Möglichkeiten, wie eine Ebene zu einer anderen Ebene liegen kann (Abb. 19):

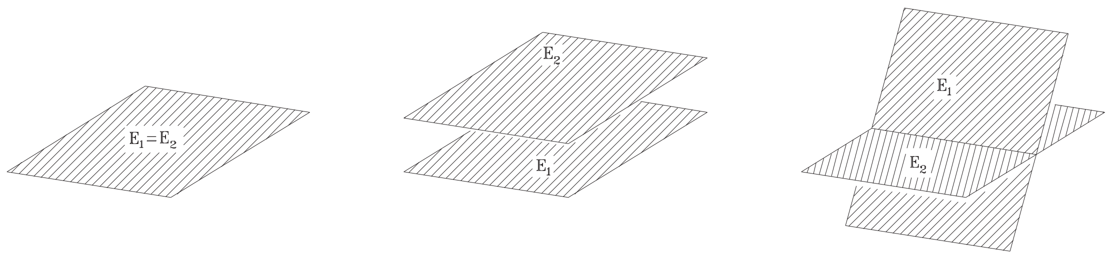

Abbildung 19: Lage von einer Ebene zu einer zweiten Ebene

a) Die Ebenen sind deckungsgleich.

b) Die Ebenen sind parallel aber nicht gleich.
c) Die Ebenen sind nicht parallel und haben genau eine Schnittgerade.

Antwort 47: Die Schnittmenge zweier Ebenen ist entweder die leere Menge, eine Gerade oder eine Ebene.

Antwort 48: Falls die eine Gleichung ein Vielfaches der anderen ist, sind die Ebenen gleich. Falls die Koeffiziententripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) Vielfache voneinander sind, dann sind die Ebenen parallel. Sonst haben die Ebenen eine Schnittgerade.

Antwort 49:
a) Die erste Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten (nämlich mit Faktor -1). Die Ebenen sind gleich.
b) Die Koeffiziententripel lauten $(1, 1, 1)$ und $(-1, -1, -1)$ und sind damit Vielfache voneinander (Faktor -1). Die Ebenen sind somit parallel, aber nicht gleich, denn die Gleichungen sind nicht Vielfache voneinander.
c) Die Koeffiziententripel lauten $(1, 1, 1)$ und $(1, 1, -1)$ und sind damit nicht Vielfache voneinander und somit gibt es eine Schnittgerade.
d) Die Koeffiziententripel lauten $(6, -2, 4)$ und $(-3, 1, -2)$ und sind damit Vielfache voneinander (Faktor -2). Die Ebenen sind somit parallel, aber nicht gleich, denn die Gleichungen sind nicht Vielfache voneinander.
e) Die erste Gleichung ist ein Vielfaches der zweiten (nämlich mit Faktor -2). Die Ebenen sind gleich.

Antwort 50:
a) Seien unsere zwei Ebenen durch die zwei Koordinatengleichungen

$$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

und

$$E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

gegeben. Wir wählen nun ein Koeffizientenpaar (a_1, b_1), (a_1, c_1) oder (b_1, c_1) aus, so dass dieses nicht ein Vielfaches des entsprechenden Koeffizientenpaars der zweiten Gleichung ist. Falls kein solches existiert, sind die Ebenen parallel oder gar gleich und die Suche nach der Schnittgerade erübrigt sich. Nehmen wir also an, dass wir ein Koeffizientenpaar gefunden haben. Die beiden Koeffizienten gehören zu je einer der Variablen x, y, z und es bleibt eine Variable übrig. Diese ersetzen wir in den beiden Koordinatengleichungen durch den Parameter α. Falls z.B. x die übrig gebliebene Variable ist, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\alpha + b_1y + c_1z + d_1 \\ 0 &= a_2\alpha + b_2y + c_2z + d_2. \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem nach y und z auf. Dann haben wir je eine Gleichung für x, y, z in Abhängigkeit des Parameters α, was uns sofort eine Parameterdarstellung liefert.
b) Seien die zwei Ebenen durch die Parametergleichungen

$$E_1 : \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$$

und

$$E_2 : \vec{r} = \vec{d} + \lambda\vec{e} + \mu\vec{f}$$

gegeben. Wir setzen die Parametergleichungen gleich $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c} = \vec{d}+\alpha\vec{e}+\beta\vec{f}$, was dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 &= d_1 + \alpha e_1 + \beta f_1 \\ a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 &= d_2 + \alpha e_2 + \beta f_2 \\ a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 &= d_3 + \alpha e_3 + \beta f_3 \end{aligned}$$

entspricht. Dies ist ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Dieses lösen wir nun auf. Falls wir keine Lösung erhalten, sind die Ebenen parallel. Falls λ durch μ (oder α durch β) ausgedrückt werden kann, können wir in der Parameterdarstellung der Ebene λ durch μ (oder α durch β) ersetzen und wir haben eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade. Fall keine Abhängigkeit zwischen λ und μ (oder α und β) gefunden wird (d.h. $0 = 0$), sind die Ebenen gleich.
c) Seien unsere Ebenen also gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$$

und

$$E_2 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Die Parameterdarstellung ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 \\ y &= a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 \\ z &= a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3. \end{aligned}$$

Wir können dieses nun in die Koordinatengleichung einsetzten und erhalten dann eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Lösen wir diese nun nach einer Unbekannten auf, sind drei verschiedene Fälle möglich. Falls $0 = 0$ herauskommt, sind die Ebenen identisch, falls $1 = 0$ herauskommt sind die Ebenen parallel aber nicht gleich. Ansonsten können wir die berechnete Unbekannte in die Parameterdarstellung der ersten Ebene einsetzen und wir erhalten die Parameterdarstellung der Schnittgerade.

Aufgabe 18: Seien zwei Ebenen $E_1 : 2x + 3y + 5z + 1 = 0$ und $E_2 = x + y + 2z - 1 = 0$ gegeben. Berechne die Schnittgerade von E_1 und E_2.

Lösung: Da $2x + 3y + 5z$ kein Vielfaches von $x + y + 2z$ ist, gibt es eine Schnittgerade zwischen E_1 und E_2. Da $2x + 5z$ nicht Vielfaches von $x + 2z$ ist, ist die Schnittgerade g nicht parallel zur xz-Ebene. g schneidet somit die xz-Ebene. Diesen Schnittpunkt nehmen wir als Startvektor $\vec{a}$ für die Gerade. Den Richtungsvektor für g können wir so strecken, dass in der y-Komponente eine 1 stehen muss (geht, da g nicht parallel ist zur xz-Ebene und der Richtungsvektor der Geraden g in der y-Komponente somit keine Null haben darf). Die y-Komponente der Gerade g lautet also:

$$y = t.$$

Da g aber auch in unseren beiden Ebenen liegen muss, können wir $y = t$ in die Koordinatengleichungen von E_1 und E_2 einsetzten. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 3t + 5z + 1 \\ 0 &= x + t + 2z - 1. \end{aligned}$$

Nun lösen wir dieses Gleichungssystem nach x und z auf: Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2 und ziehen sie dann von der ersten ab, erhalten wir

$$0 = t + z + 3,$$

also $z = -3 - t$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein und lösen nach x auf, so ergibt sich $x = t + 7$. Wir haben also die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= t + 7 \\ y &= t \\ z &= -3 - t. \end{aligned}$$

Das liefert uns eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19: Seien zwei Ebenen $E_1 : 2x+2y+z+1=0$ und $E_2 = x+y+z-1=0$ gegeben. Berechne die Schnittgerade von E_1 und E_2.

Lösung: Da $2x+2y+z$ kein Vielfaches von $x+y+z$ ist, gibt es eine Schnittgerade zwischen E_1 und E_2. Da $2y+z$ nicht Vielfaches von $y+z$ ist, ist die Schnittgerade g nicht parallel zur yz-Ebene. g schneidet somit die yz-Ebene. Diesen Schnittpunkt nehmen wir als Startvektor $\vec{a}$ für die Gerade. Den Richtungsvektor für g können wir so strecken, dass in der x-Komponente eine 1 stehen muss (geht, da g nicht parallel ist zur yz-Ebene und der Richtungsvektor der Geraden g in der x-Komponente somit keine Null haben darf). Die x-Komponente der Gerade g lautet also:

$$x = t.$$

Da g aber auch in unseren beiden Ebenen liegen muss, können wir $x = t$ in die Koordinatengleichungen von E_1 und E_2 einsetzten. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 2t+2y+z+1 \\ 0 &= t+y+z-1. \end{aligned}$$

Nun lösen wir dieses Gleichungssystem nach y und z auf: Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, erhalten wir

$$0 = t+y+2,$$

also $y = -t-2$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein und lösen nach z auf, so ergibt sich $z = 3$. Wir haben also die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -t-2 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Das liefert uns die Parameterdarstellung für die Schnittgerade:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Ebene parallel zur xy-Ebene liegt und die Wahl von z deshalb verboten war (da $2x+2y$ ja Vielfaches von $x+y$ haben wir das ja schon am Anfang gesehen).

Aufgabe 20: Seien zwei Ebenen gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Schnittgerade.

Lösung: Jeder Punkt der Schnittgerade erfüllt die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen. Wir können also diese gleichsetzen und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1+\lambda &= 2\alpha+\beta \\ \mu &= 1+\alpha-\beta \\ \lambda+\mu &= 3\alpha. \end{aligned}$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem auf. Dazu zählen wir die ersten beiden Gleichungen zusammen und erhalten somit

$$1+\lambda+\mu = 1+3\alpha.$$

Wir ersetzen in dieser Gleichung nun 3α durch die dritte Gleichung und wir erhalten

$$1+\lambda+\mu=1+\lambda+\mu,$$

also $0=0$. Für alle Zahlenpaare für λ und μ ist das Gleichungssystem erfüllt. Jeder Punkt der Ebene E_1 ist also Schnittpunkt. Die Ebenen sind also die gleichen.

Aufgabe 21: Seien zwei Ebenen gegeben durch

$$E_1:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

und

$$E_2:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Berechne die Schnittgerade.

Lösung: Jeder Punkt der Schnittgerade erfüllt die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen. Wir können also diese gleichsetzen und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda &= 2\alpha+\beta\\ \mu &= 1+\alpha-\beta\\ 1+\lambda+\mu &= 3\alpha.\end{aligned}$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem auf. Dazu zählen wir die ersten beiden Gleichungen zusammen und erhalten somit

$$\lambda+\mu=1+3\alpha.$$

Wir ersetzen in dieser Gleichung nun 3α durch die dritte Gleichung und wir erhalten

$$\lambda+\mu=2+\lambda+\mu,$$

also $0=2$. Das Gleichungssystem hat somit keine Lösung. D.h. es gibt keine Punkte, die sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegen. D.h. die Ebenen sind parallel, aber nicht gleich und haben deshalb keine Schnittgerade.

Aufgabe 22: Seien zwei Ebene gegeben durch

$$E_1:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

und

$$E_2:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Berechne die Schnittgerade.

Lösung: Jeder Punkt der Schnittgerade erfüllt die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen. Wir können also diese gleichsetzen und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha+\beta\\ \mu &= 1+\alpha+\beta\\ 1+\lambda+\mu &= \beta\end{aligned}$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem auf. Dazu setzen wir die erste und die zweite Gleichung in die dritte ein und erhalten

$$1+\alpha+\beta+1+\alpha+\beta=\beta.$$

Es folgt also $\beta = -2 - 2\alpha$. Jeder Punkt auf der Ebene E_2 mit $\beta = -2 - 2\alpha$ ist also Schnittpunkt. Setzen wir also $\beta = -2 - 2\alpha$ in die Parametergleichung der zweiten Ebene ein und wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2 - 2\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \vec{r} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist die Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

Aufgabe 23: Seien zwei Ebenen gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 : x + y - z - 1 = 0.$$

Berechne den Schnittpunkt von E_1 und E_2.

Lösung: Da jeder Schnittpunkt auf E_1 liegt, liefert die Parameterdarstellung der ersten Ebene

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= \mu \\ z &= \lambda + \mu. \end{aligned}$$

Da die Schnittpunkte aber auch in E_2 liegen, können wir die drei Komponenten in die Koordinatengleichung der zweiten Ebene einsetzen. Wir erhalten also

$$1 + \lambda + \mu - \lambda - \mu - 1 = 0,$$

also $0 = 0$. D.h. für beliebige Zahlenpaare für λ und μ ist das Gleichungssystem erfüllt und somit ist jeder Punkt der Ebene E_1 Schnittpunkt. E_1 und E_2 sind also gleich.

Aufgabe 24: Seien zwei Ebenen gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 : x + y - z - 1 = 0.$$

Berechne den Schnittpunkt von E_1 und E_2.

Lösung: Da jeder Schnittpunkt auf E_1 liegt, liefert die Parameterdarstellung der ersten Ebene

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= 1 + \lambda + \mu. \end{aligned}$$

Da die Schnittpunkte aber auch in E_2 liegen, können wir die drei Komponenten in die Koordinatengleichung der zweiten Ebene einsetzen. Wir erhalten also

$$\lambda + \mu - 1 - \lambda - \mu - 1 = 0,$$

also $-2 = 0$ und damit ist für kein Zahlenpaar λ und μ das Gleichungssystem erfüllt. Kein Punkt der Ebene E_1 ist also Schnittpunkt. Die zwei Ebenen sind also parallel, aber nicht gleich.

Aufgabe 25: Seien zwei Ebenen gegeben durch

$$E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 : x - y + 1 = 0.$$

Berechne den Schnittpunkt von E_1 und E_2.

Lösung: Da jeder Schnittpunkt auf E_1 liegt, liefert die Parameterdarstellung der ersten Ebene

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= 1 + \lambda + \mu. \end{aligned}$$

Da die Schnittpunkte aber auch in E_2 liegen, können wir die drei Komponenten in die Koordinatengleichung der zweiten Ebene einsetzen. Wir erhalten also

$$\lambda - \mu + 1 = 0,$$

also $\lambda = \mu - 1$. Jeder Punkt der ersten Ebene mit $\lambda = \mu - 1$ ist also ein Schnittpunkt. Wir können also in der Parameterdarstellung von E_1 λ durch $\mu - 1$ ersetzen und erhalten damit

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\mu - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \vec{r} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist dann genau die Schnittgerade von E_1 und E_2.

Antwort 51: Zu jeder Ebene gibt es genau eine Richtung, welche senkrecht (normal) zu ihr steht. Ein Vektor $\vec{n}$, der in diese Richtung zeigt (Abb. 20), legt die Ausrichtung einer Ebene also fest (natürlich nicht die genaue Lage, da ja parallele Ebenen die gleiche Ausrichtung haben).

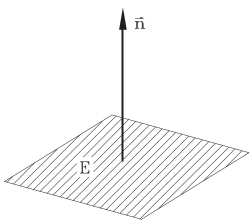

Abbildung 20: Normalenvektor einer Ebene

Antwort 52: Um den Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden zu definieren, betrachten wir zuerst den Winkel $\tilde{\alpha}$ der zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und den Normalenvektor der Ebene liegt. Der Winkel zwischen der Gerade und der Ebenen ist dann offensichtlich $\alpha = 90 - \tilde{\alpha}$ (Abb. 21 links).

Antwort 53: Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist genau der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren (Abb. 21 rechts).

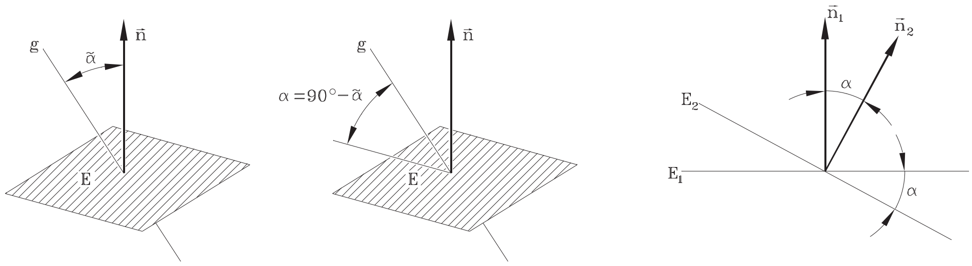

Abbildung 21: Winkel zwischen Ebene und Gerade bzw. Ebene und Ebene