

Vektorgeometrie

Version: 28. Dezember 2007

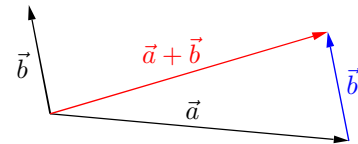
(Bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)



1. Mathematische Operationen für Vektoren

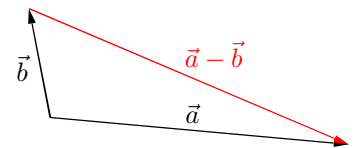
Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



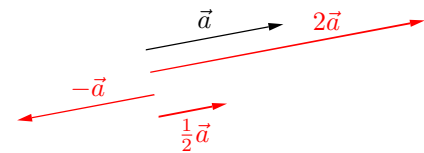
Subtraktion

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Skalare Multiplikation

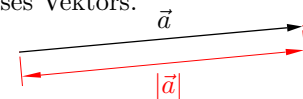
$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Betrag

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

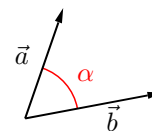
Der Betrag von Vektor \vec{a} ist gerade die Länge dieses Vektors.



Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man Winkel zwischen 2 Vektoren berechnen.

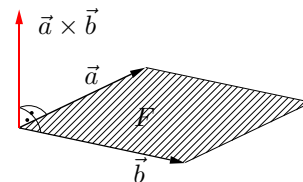


$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wichtig: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = F$$

Wichtige Anwendungen:

- Normalvektor einer Ebene (A, \vec{b}, \vec{c}) : $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$
- Dreiecksfläche: $F = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Abstand Gerade (A, \vec{b}) und Punkt (P) : $d = \frac{|\vec{AP} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$
- \vec{a}, \vec{b} kollinear $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

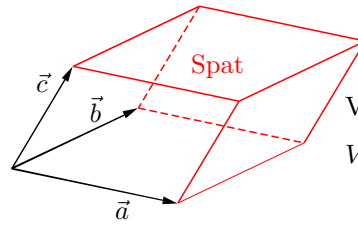
! nur 3D !

! nur 3D !

Spatprodukt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



Volumen des Spat:
 $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Wichtige Anwendungen:

- Volumen eines Tetraeders: $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$
- Abstand von 2 Geraden $g(A, \vec{b})$ und $h(C, \vec{d})$:

$$d = \frac{|(\vec{b} \times \vec{d}) \cdot \vec{AC}|}{|\vec{b} \times \vec{d}|}$$

Gesetze für die Grundoperationen

- Kommutativgesetz $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda(\mu \cdot \vec{a})$
- Distributivgesetz $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Gesetze für das Rechnen mit dem Skalarprodukt

- Kommutativgesetz $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Assoziativgesetz $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Quadrat $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

! nur 3D !

Gesetze für das Rechnen mit dem Vektorprodukt

- Kommutativgesetz gilt nicht, aber: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Assoziativgesetz gilt nicht allgemein
- Distributivgesetz $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(x\vec{a}) \times (y\vec{b}) = xy(\vec{a} \times \vec{b})$

Gesetze für das Rechnen mit dem Spatprodukt

- Zyklische Permutation $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$
- $[x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}] = xyz \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$

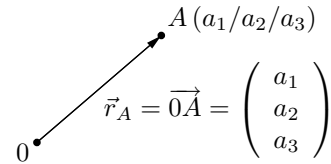
2. Vektoren und Punkte

Ortsvektoren: Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren

$$A(a_1/a_2/a_3)$$

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_A = \vec{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



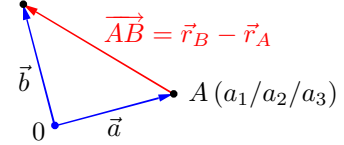
Vektor zwischen zwei Punkten

$$A(a_1/a_2/a_3)$$

$$B(b_1/b_2/b_3)$$

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$B(b_1/b_2/b_3)$$

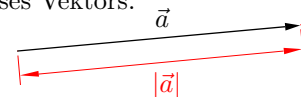


Länge eines Vektors (=Betrag)

$$|\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Der Betrag von Vektor \vec{a} ist gerade die Länge dieses Vektors.

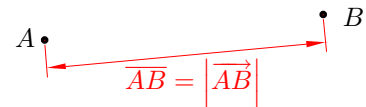


Abstand zwischen zwei Punkten

$$A(a_1/a_2/a_3)$$

$$B(b_1/b_2/b_3)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

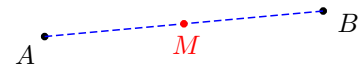


Mittelpunkt M einer Strecke \overline{AB}

$$A(a_1/a_2/a_3)$$

$$B(b_1/b_2/b_3)$$

$$\vec{r}_M = \vec{0M} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$



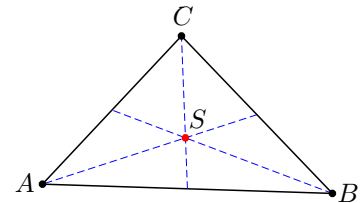
Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC

$$A(a_1/a_2/a_3)$$

$$B(b_1/b_2/b_3)$$

$$C(c_1/c_2/c_3)$$

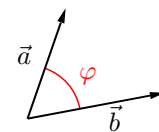
$$\vec{r}_S = \vec{0S} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$



Winkel zwischen 2 Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Wichtige Anwendungen:

- Winkel zwischen zwei Geraden $g(A, \vec{b})$ und $h(C, \vec{d})$:

$$\cos \varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{d}|} \right|$$

- Winkel zwischen Gerade $g(A, \vec{b})$ und Ebene $E(C, \vec{n})$:

$$\sin \varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{n}|} \right|$$

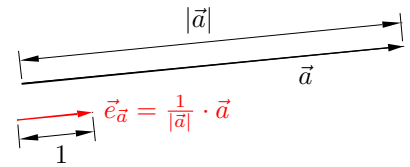
- Winkel zwischen Ebene $E_1(A, \vec{n}_1)$ und $E_2(B, \vec{n}_2)$:

$$\cos \varphi = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$$

Einheitsvektoren (Vektor mit Länge 1)

\vec{a}

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

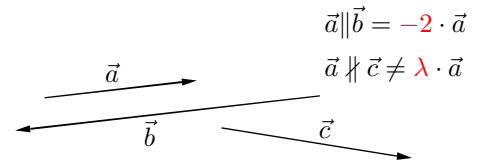


Parallele (kollineare) Vektoren

\vec{a}, \vec{b}

Zwei Vektoren sind genau dann kollinear (gleiche oder entgegengesetzte Richtung), wenn sie Vielfache voneinander sind:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ kollinear} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$



Senkrechte (normale) Vektoren

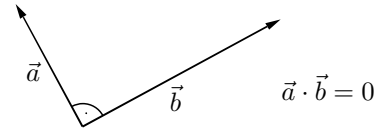
\vec{a}, \vec{b}

- $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Senkrechte Vektoren produzieren im 2-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

- Senkrechte Vektoren produzieren im 3-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



3. Die Gerade

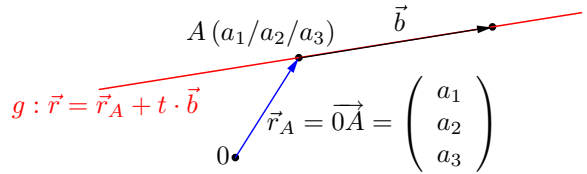
Parameterdarstellung der Geraden

Startpunkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

$$g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{b}$$

Richtung: \vec{b}

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

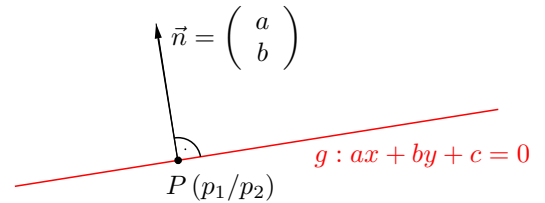


Koordinatengleichung der Geraden

Normalvektor zu $g: \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$g: ax + by + c = 0$$

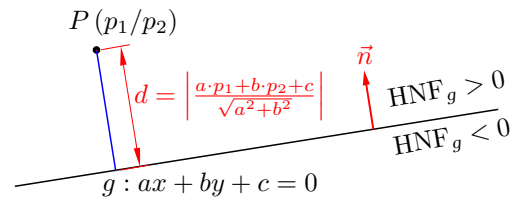
Punkt auf $g: P(p_1/p_2)$



HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Gerade

$$g: ax + by + c = 0 \quad \text{HNF}_g: \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

$$d = |\text{HNF}_g(P)| = \left| \frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

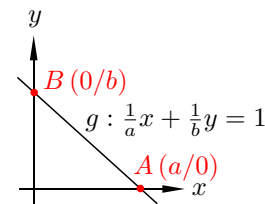


Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)

Achsenabschnittsgleichung:

$$g: ax + by + c = 0 \quad \frac{1}{a} \cdot x + \frac{1}{b} \cdot y = 1$$

$\Rightarrow A(a/0), B(0/b)$ sind die Achsenabschnitte



Explizite Darstellung (Lineare Funktion)

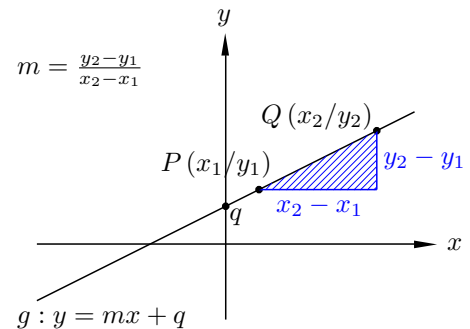
$$P(x_1/y_1) \quad g: y = mx + q$$

$Q(x_2/y_2)$ \circ Steigung: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

\circ y -Achsenabschnitt: q

\circ Senkrechte Steigung: $m_{\perp} = -\frac{1}{m}$

\circ Winkel zwischen g und h : $\tan \gamma = \left| \frac{m_h - m_g}{1 + m_g \cdot m_h} \right|$

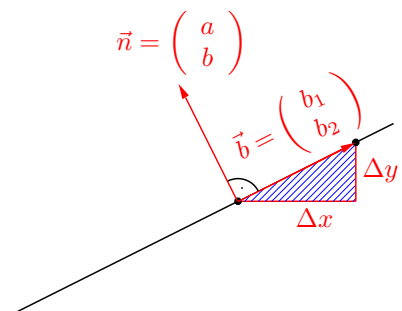


Zusammenhang zwischen Richtungvektor \vec{b} , Normalenvektor \vec{n} und Steigung m

$$g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{b} \quad \circ \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

$$g: ax + by + c = 0 \quad \circ \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$g: y = mx + q \quad \circ \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{a}{b}$$



! nur 2D !

4. Die Ebene

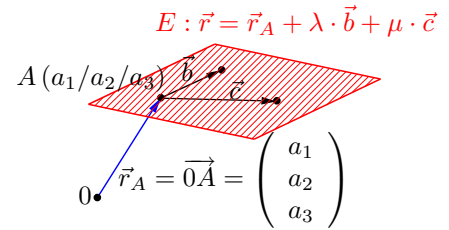
Parameterdarstellung der Ebene

Startpunkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

$$g: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$$

2 Richtungen: \vec{b}, \vec{c}

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

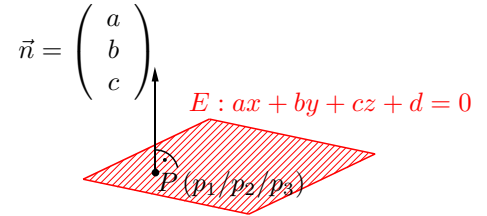


Koordinatengleichung der Ebene

Normalvektor zu $E: \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

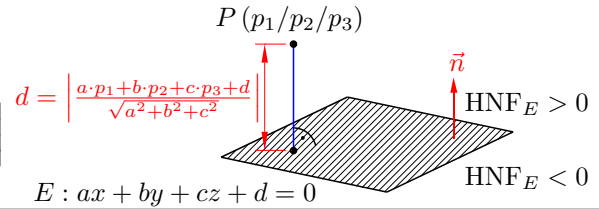
Punkt auf $E: P(p_1/p_2/p_3)$



HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Ebene

$$E: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{HNF}_E: \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

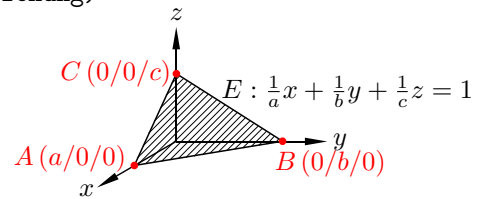
$$P(p_1/p_2/p_3) \quad d = |\text{HNF}_E(P)| = \left| \frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$



Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)

$$E: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{Achsenabschnittsgleichung:} \quad \frac{1}{a} \cdot x + \frac{1}{b} \cdot y + \frac{1}{c} \cdot z = 1$$

$\Rightarrow A(a/0/0), B(0/b/0), C(0/0/c)$
sind die Achsenabschnitte



Zusammenhang zwischen den Richtungsvektoren \vec{b}, \vec{c} und dem Normalenvektor \vec{n}

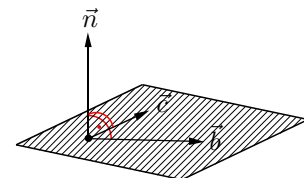
$$E: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c} \quad \circ \quad E: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$$

$$E: ax + by + cz + d = 0 \quad \Rightarrow \vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} \text{ ist ein Normalvektor}$$

$$\circ \quad E: ax + by + cz + d = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ ist ein Normalvektor}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sind Richtungsvektoren}$$



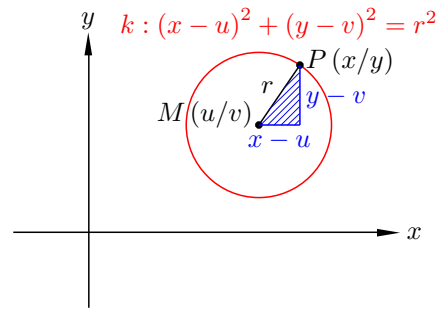
5. Der Kreis

Mittelpunktsgleichung

Mittelpunkt: $M(u/v)$

Radius: r

$$k : (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$



Ausmultiplizierte Form der Kreisgleichung

Mittelpunkt: $M(u/v)$

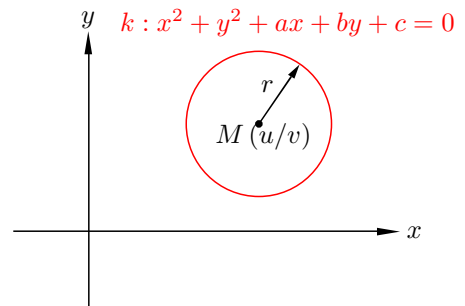
Radius: r

$$k : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

und es gilt:

$$u = -\frac{a}{2} \quad v = -\frac{b}{2}$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$$



Polare p eines Kreises k bezüglich des Punkts P

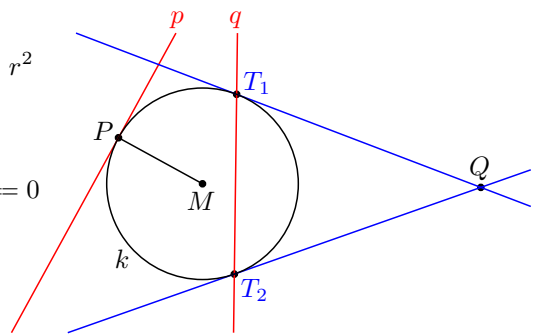
$$k : (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \quad p : (p_1 - u) \cdot (x - u) + (p_2 - v) \cdot (y - v) = r^2$$

bzw.

bzw.

$$k : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad p : p_1x + p_2y + \frac{1}{2}a(p_1 + x) + \frac{1}{2}b(p_2 + y) + c = 0$$

$P(p_1/p_2)$

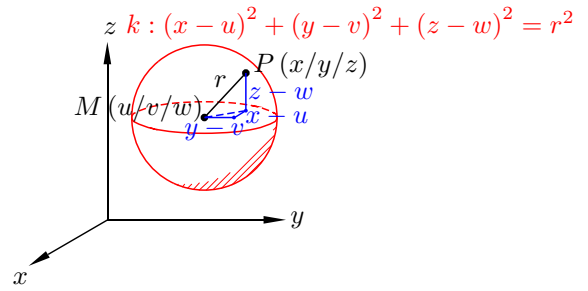


6. Die Kugel

Mittelpunktsgleichung

Mittelpunkt: $M(u/v/w)$

Radius: r $k: (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$



Ausmultiplizierte Form der Kreisgleichung

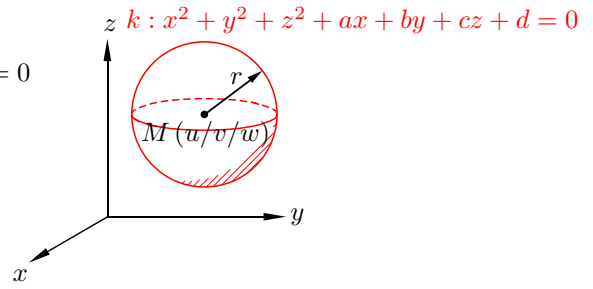
Mittelpunkt: $M(u/v/w)$ $k: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Radius: r

und es gilt:

$$u = -\frac{a}{2} \quad v = -\frac{b}{2} \quad w = -\frac{c}{2}$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} > 0$$



Polarebene p einer Kugel k bezüglich des Punkts P

$$k: (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$$

$$p: (p_1 - u) \cdot (x - u) + (p_2 - v) \cdot (y - v) + (p_3 - w) \cdot (z - w) = r^2$$

bzw.

bzw.

$$k: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$p: p_1x + p_2y + p_3z + \frac{1}{2}a(p_1 + x) + \frac{1}{2}b(p_2 + y) + \frac{1}{2}c(p_3 + z) + d = 0$$

$P(p_1/p_2/p_3)$

P auf Kugel k

P ausserhalb Kugel k

