

Poissonverteilung

Definition und Eigenschaften von $X_{\lambda-P}$ ($\lambda > 0$)

$x_i = i \quad (i \in \mathbb{N}_0)$	0	1	2	...
$p(x_i) = \frac{\lambda^i \cdot e^{-\lambda}}{i!}$	$\frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} = \lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2}$...

- Erwartungswert: $E(X_{\lambda-P}) = \mu = \lambda > 0$
- Varianz: $V(X_{\lambda-P}) = \sigma^2 = \lambda$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

- Man kann zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$



www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

Anwendung 1: Annäherung von Binomialverteilten Zufallsgrößen $X_{B(n,p)}$

Wenn $X_{B(n,p)}$ eine Binomialverteilung mit sehr kleinem p und sehr grossem n ist (Faustregel: $p < 0.05$ und $n > 10$), dann kann man die Wahrscheinlichkeiten von $X_{B(n,p)}$ mit Hilfe der Poissonverteilung $X_{\lambda-P}$ ($\lambda = n \cdot p$) recht gut annähern.

Beispiel: Sei $X_{B(n,p)}$ binomialverteilt mit $p = 0.01$ und $n = 1000$. Wie gross ist dann $P(X_{B(1000,0.01)} = 10)$?

Lösung:

mit Binomialverteilung:

$$P(X_{B(1000,0.01)} = 10) = \binom{1000}{10} \cdot 0.01^{10} \cdot 0.99^{990} = \underline{0.12574}$$

Das Problem ist, dass das mit einem normalen Taschenrechner wegen den hohen Exponenten nicht mehr berechnet werden kann. Deshalb nähern wir das Resultat mit einer Poissonverteilung an. Also:

mit Poissonverteilung:

Berechne den Erwartungswert der Binomialverteilung: $\mu = np = 1000 \cdot 0.01 = 10$

Also:

$$P(X_{B(1000,0.01)} = 10) \simeq P(X_{10-P} = 10) = \frac{10^{10} \cdot e^{-10}}{10!} = \underline{0.12511}$$

Dieses Resultat kann sogar mit einem besseren Werbegeschenk-Taschenrechner berechnet werden.

Anwendung 2: Poissonverteilte Zufallsgrösse im Alltag

Tritt ein Ereignis in einem bestimmten Intervall völlig zufällig mit einem bestimmten Erwartungswert μ ein, dann ist die Zufallsgrösse X , welche angibt, wie viel mal das Ereignis in dem selben Intervall eintritt, gerade μ -Poissonverteilt (Begründung siehe separates Blatt).

Beispiel: In 1 Liter Flüssigkeit befinden sich 300 Fremdkörper, die in der Flüssigkeit zufällig verteilt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in 1 cm^3 der Flüssigkeit 2 oder mehr Fremdkörper?

Lösung:

Der Erwartungswert für 1 cm^3 ist $\mu = \frac{300}{1000} = 0.3$ (1 Liter hat 1000 cm^3). Die Zufallsvariable, welche die Anzahl Fremdkörper pro cm^3 angibt ist also 0.3-Poissonverteilt. Also:

$$P(X_{0.3-P} \geq 2) = 1 - P(X_{0.3-P} < 2) = 1 - (P(X_{0.3-P} = 0) + P(X_{0.3-P} = 1))$$

$$P(X_{0.3-P} = 0) = \frac{0.3^0 \cdot e^{-0.3}}{0!} = e^{-0.3} = 0.740818$$

$$P(X_{0.3-P} = 1) = \frac{0.3^1 \cdot e^{-0.3}}{1!} = 0.3 \cdot e^{-0.3} = 0.222245$$

$$\text{Also: } P(X_{0.3-P} \geq 2) = 1 - (0.740818 + 0.222245) = 0.036936$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es in 1 cm^3 2 oder mehr Fremdkörper hat, beträgt 3.7%.

Poissonverteilte Zufallsgrösse im Alltag

Beispiel: Auf einem Strassenstück ereignet sich im Mittel 0.4 Unfälle pro Monat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignet sich auf diesem Strassenstück in einem Monat mehr als 1 Unfall.

Wir versuchen nun ein mathematisches Modell für diese Situation aufzustellen.

Modell 1: Wie nehmen an, dass in einem Monat ein Unfall eintritt mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.4$ und kein Unfall mit Wahrscheinlichkeit $q = 0.6$. Wir haben also eine Binomialverteilung mit:

$$n = 1, p = 0.4, \mu = 0.4$$

Dieses Modell erfüllt zwar die Bedingung, dass sich im Mittel 0.4 Unfälle ereignen, aber es entspricht nicht der Realität, da sich pro Monat ja auch mehr als ein Unfall ereignen kann. Wir müssen also unser Modell ein wenig verbessern.

Modell 2: Wie nehmen an, dass in einem Tag ein Unfall eintritt mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda}{n} = \frac{0.4}{30} = 0.013$ und kein Unfall mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0.987$. Für die Anzahl Unfälle in einem Monat haben wir also eine Binomialverteilung mit:

$$n = 30, p = 0.013, \mu = 0.4$$

Dieses Modell erfüllt immer noch die Bedingung, dass sich im Mittel 0.4 Unfälle pro Monat ereignen, ist aber wesentlich näher an der Realität, weil nun täglich ein Unfall passieren kann. Es ist aber immer noch nicht genau, da es ja auch möglich ist, dass am gleichen Tag mehrere Unfälle passieren. Also verbessern wir unser Modell weiter.

Modell 3: Wie nehmen an, dass innerhalb einer Sekunde ein Unfall eintritt mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda}{n} = \frac{0.4}{30 \cdot 24 \cdot 3600} = 0.000000154$ und kein Unfall mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0.999999846$. Für die Anzahl Unfälle in einem Monat haben wir also eine Binomialverteilung mit:

$$n = 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2592000, p = 0.000000154, \mu = 0.4$$

Dieses Modell erfüllt auch immer noch die Bedingung, dass sich im Mittel 0.4 Unfälle pro Monat ereignen, und es ist bildet die Realität nun beinahe schon exakt ab, da die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Unfall pro Sekunde eintritt, verschwindend klein ist. Für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit können wir deshalb schon mit gutem Gewissen annehmen, dass folgendes gilt:

$$P(\text{mehr als 1 Unfall pro Monat}) \simeq P(X_{B(2592000, 0.000000154)} > 1) \simeq P(X_{0.4-P} > 1)$$

Die Binomialverteilung dürfen wir durch die Poissonverteilung zu $\lambda = \mu = 0.4$ annähern, da n sehr gross und p sehr klein ist.

Auch wenn dieses Modell schon beinahe exakt der Wirklichkeit entspricht, können wir es immer noch verbessern in dem wir den Monat in noch kleinere Zeitintervalle aufteilen. Das führt uns zum abschliessenden Modell 4.

Modell 4: Wir teilen den Monat in noch mehr Zeitintervalle auf und betrachten den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$. Dadurch werden die Zeitintervalle, in denen ein Unfall auftreten kann unendlich klein, und wir haben ein exaktes Abbild der Realität. Unsere Binomialverteilung sieht dann wie folgt aus:

$$n \rightarrow \infty, p = \frac{\mu}{n} \rightarrow 0, \mu = n \cdot p = 0.4$$

Und somit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{mehr als 1 Unfall pro Monat}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{B(n, \frac{0.4}{n})} > 1) = P(X_{0.4-P} > 1)$$

Da für $n \rightarrow \infty$ die Poissonverteilung exakt mit der Binomialverteilung übereinstimmt, ist die die Zufallsgrösse, welche die Anzahl Unfälle pro Monat angibt, in der Tat exakt Poissonverteilt zum Parameter $\lambda = \mu = 0.4$.

Also:

$$\begin{aligned} P(\text{mehr als 1 Unfall pro Monat}) &= P(X_{0.4-P} > 1) = 1 - P(X_{0.4-P} \leq 1) \\ &= 1 - (P(X_{0.4-P} = 0) + P(X_{0.4-P} = 1)) = 1 - \left(\frac{0.4^0 \cdot e^{-0.4}}{0!} + \frac{0.4^1 \cdot e^{-0.4}}{1!} \right) \\ &= 1 - (e^{-0.4} + 0.4 \cdot e^{-0.4}) = 1 - 1.4 \cdot e^{-0.4} = 1 - 0.93845 = 0.06155 \end{aligned}$$

Das Wahrscheinlichkeit für mehr als 1 Unfall pro Monat beträgt also 6.2%.

Fazit: Ereignet sich in einem Intervall (z.B. in einer gewissen Zeit, auf einer gewissen Fläche, in einem gewissen Volumen usw.) ein völlig zufällig auftretendes Ereignis im Schnitt μ mal (Erwartungswert, Mittelwert), dann ist die Zufallsgrösse, welche die Häufigkeit des Ereignisses in diesem Intervall angibt, Poissonverteilt zum Parameter $\lambda = \mu$.