Wahrscheinlichkeit & Statistik

Version: *23. Juni 2005*

created by
mathenachhilfe.ch

www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

Mengen als Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Begriffe, Grundregeln

◇ Ereignisraum: Ω

$\Omega =$ Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments

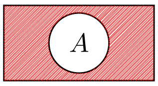
◇ Ereignis: $A, B, C, \ldots$

Ereignisse umfassen verschiedenen Ergebnissen aus dem Wahrscheinlichkeitsraum. Ereignisse sind Teilmengen vom Ereignisraum Ω: $A \subseteq \Omega$.

◇ Wahrscheinlichkeit: $P(A)$

$P(A) \in [0,1]$ (Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 100%)
$P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ ist das unmögliche Ereignis)
$P(\Omega) = 1$ (Ω ist das sichere Ereignis)

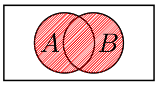
◇ Gegenereignis: $\overline{A}$



Das Gegenereignis umfasst alle Ergebisse, die nicht in A enthalten sind. Es gilt:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

◇ zwei Ereignisse A, B: $A \cup B$



$A \cup B$ umfasst alle Ergebnisse, die in A, in B oder in beiden enthalten sind (A oder B). Es gilt:

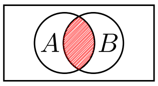
∘ für Ereignisse ohne gemeinsame Ergebnisse ($A \cap B = \emptyset$):

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

∘ für Ereignisse mit gemeinsamen Ergebnissen ($A \cap B \neq \emptyset$):

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$A \cap B$



$A \cap B$ umfasst alle Ergebnisse, die in A und in B gleichzeitig vorkommen (A und B). Es gilt:

∘ für unabhängige Ereignisse:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

∘ für abhängige Ereignisse:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

◇ Bedingte Wahrsch'keit, unabhängige Ereignisse: $P(A|B)$

Die bedingte Wahrscheinlickeit gibt die Wahrscheinlickeit für ein Ereignis A an, wenn man schon weiss, dass das Ereignis B eingetreten ist.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig falls: $P(A|B) = P(A)$

◇ absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit: $H(A)$, $h(A)$

Wird ein Experiment n mal hintereinander durchgeführt, dann bezeichnet man mit der absoluten Häufigkeit $H(A)$ die Anzahl Experimente, bei denen das Ereignis A eingetreten ist.

Die relative Häufigkeit $h(A)$ gibt den Prozentualen Anteil der Experimente an, bei welchen das Ereignis A eingetreten ist.

Wird ein Experiment "sehr oft" wiederholt, nähert sich die relative Häufigkeit $h(A)$ an die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ an.

$$\boxed{\frac{H(A)}{n} = h(A) \cong P(A) \quad \text{(für genügend grosse } n\text{)}}$$

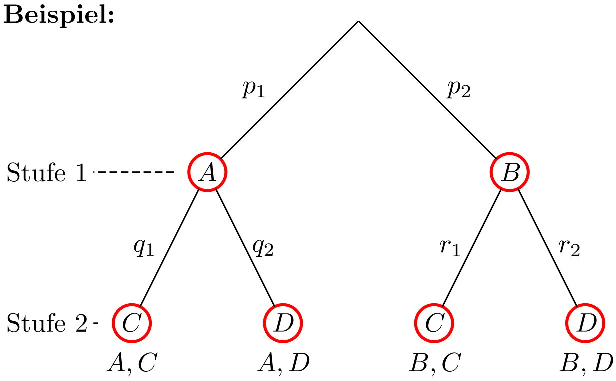
Baumdiagramme

Bei mehrstufigen Experimenten kann ist es oft hilfreich, ein Baumdiagramm zu zeichnen. Jeder Ast entspricht einer möglichen Kombination der Ereignisse der verschiedenen Stufen. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten gilt:

- ◇ Entlang eines Astes müssen die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden
- ◇ Die Wahrscheinlichkeiten mehrer Äste müssen addiert werden.

Baumdiagramme sind vor allem sinnvoll bei zwei- oder dreistufigen Experimenten.

Beispiel:



- ○ Einzelne Äste: $\boxed{P(A, C) = p_1 \cdot q_1}$

  $\boxed{P(A, D) = p_1 \cdot q_2}$
- ○ Mehrere Äste: $\boxed{P(A, C \text{ oder } B, D) = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot r_2}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, Totale Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

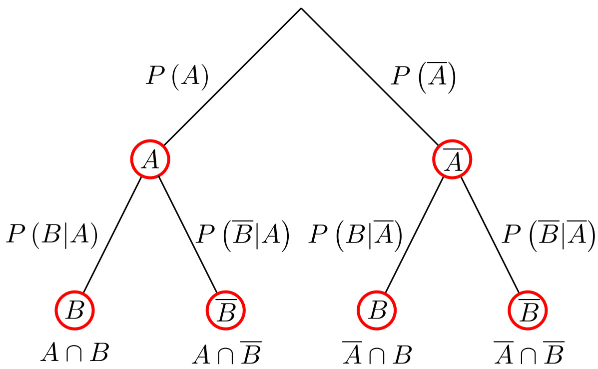
Bei der bedingten Wahrscheinlicheit interessiert uns die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A, wenn wir schon wissen, dass B eingetreten ist (z.B. wie gross die Wahrscheinlichkeit für Farbenblindheit ist, wenn man weiss, dass die Person weiblich ist). Diese **Bedingte Wahrscheinlichkeit** wird mit $P(A|B)$ bezeichnet und es gilt:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Zwei Ereignisse A und B heissen **unabhängig**, wenn $P(A) = P(A|B)$ gilt. Insbesodere gilt für unabhängige Ereignisse:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Satz von Bayes, Totale Wahrscheinlichkeit:



- ○ Totale Wahrscheinlichkeit:

$$\boxed{P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}$$

- ○ Satz von Bayes:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})}}$$

Typisches Beispiel:

- *Gegeben:*
  - ◇ Eine Krankheit tritt in der Bevölkerung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% auf: $P(K) = 0.02$
  - ◇ Ist eine Person gesund, liefert der Test zum Nachweis dieser Krankheit in 3% der Fälle fälschlicherweise ein positives Resultat: $P\left(P|\overline{K}\right) = 0.03$
  - ◇ Bei einer kranken Person zeigt der Test in 10% der Fällen ein negatives Resultat: $P\left(\overline{P}|K\right) = 0.1$
- *Gesucht:*
  - ◇ Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test positiv ist?
  - ◇ Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich krank ist, wenn der Test positiv ausgefallen ist?
- *Lösung:*
  - ◇ $P(\text{Test positiv}) = P(P) = P(K) \cdot P(P|K) + P\left(\overline{K}\right) \cdot P\left(P|\overline{K}\right) = 4.74\%$
  - ◇ $P(\text{Krank, falls Test positiv}) = P(K|P) = \dfrac{P(K) \cdot P(P|K)}{P(K) \cdot P(P|K) + P\left(\overline{K}\right) \cdot P\left(P|\overline{K}\right)} = 37.97\%$

Laplace Experimente, Kombinatorik

Wenn alle möglichen Ergebnisse eines Zufallexperiments die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, nennt man dieses Zufallexperiment ein **Laplace Expriment**. In solchen Fällen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen besonders einfach berechnen:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebniss}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{g}{m}}$$

Wobei mit $g = |A|$ die Anzahl der günstigen Ergebnisse und mit $m = |\Omega|$ die Anzahl der möglichen Ereignisse bezeichnet werden. Das Abzählen von solchen Anzahlen gehört zum Thema der Kombinatorik.

Kombinatorik

Permutationen	*n verschiedene Elemente*	*n Elemente, von denen je $k_1, k_2, \ldots$ identisch sind*
Anzahl Möglichkeiten, Elemente anzuordnen	$\boxed{n!}$ **Beispiel:** Es gibt $4! = 24$ Möglichkeiten, die Buchstaben A, B, C, D anzuordnen.	$\boxed{\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots}}$ **Beispiel:** Es gibt $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = 60$ Möglichkeiten, die Buchstaben A, A, A, B, B, C, D anzuordnen.

Auswählen ohne Zurücklegen	*<u>ohne</u> Berücksichtigung der <u>Reihenfolge</u>*	*<u>mit</u> Berücksichtigung der <u>Reihenfolge</u>*
Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus n auswählen ohne Zurücklegen (d.h. ohne Wiederholungen)	$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}}$ **Beispiel:** Es gibt $\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8'145'060$ Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 45 auszuwählen (Schweizer Zahlenlotto).	$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}$ **Beispiel:** Es gibt $\frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6'840$ verschiedene Möglichkeiten für die ersten 3 Plätze bei einem Rennen mit 20 Teilnehmern.

Auswählen mit Zurücklegen	*<u>ohne</u> Berücksichtigung der <u>Reihenfolge</u>*	*<u>mit</u> Berücksichtigung der <u>Reihenfolge</u>*
Anzahl Möglichkeiten, k Elemente aus n auswählen mit Zurücklegen (d.h. mit Wiederholungen)	$\boxed{\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}}$ **Beispiel:** Bei einem Quiz bekommt in jeder der 10 Runden einer der 4 Teilnehmer einen Punkt. Es gibt dann $\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$ mögliche Punkte-Endstände.	$\boxed{n^k}$ **Beispiel:** Es gibt $26^4 = 456'976$ Möglichkeiten, mit den Buchstaben $A, B, \ldots, Z$ ein Passwort mit 4 Buchstaben zu bilden.

Produktregel:

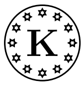
Kann ein Experiment in ein mehrstufiges Experiment zerlegt werden, so kann man die Anzahl Möglichkeiten für ein Ereignis berechnen, indem man die Anzahl Möglichkeiten der "Teilereignisse" miteinander multipliziert.

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Schweizer Zahlenlotto (6 aus 45) 3 Richtige zu ziehen?

- ⋄ Anzahl Möglichkeiten, aus den 6 Richtigen 3 auszuwählen: $\binom{6}{3}$
- ⋄ Anzahl Möglichkeiten, 39 Falschen 3 auszuwählen: $\binom{39}{3}$

$\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten Total für 3 Richtige: $\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3}$

Bernoulli-Experiment



mehrmaliges Wiederholen
eines Experiments
mit 2 Ausgängen

$n =$ Anzahl Experimente (Anzahl Münzwürfe)
$k =$ Anzahl Treffer (Anzahl Kopf)
$p =$ Trefferwahrscheinlichkeit (z.B. unfaire Münze $p = 0.6$)
$q = 1 - p =$ Nietenwahrscheinlichkeit

$$\boxed{P\,(\text{genau } k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

Beispiel:
Ein idealer Würfel wird 10 mal geworfen.

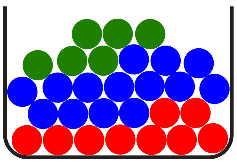
◇ Wahrscheinlichkeit für 7 Sechser: $P\,(7 \text{ Treffer}) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.00025 = 0.025\%$

◇ Wahrscheinl'keit für weniger als 9 Sechser: $P\,(\text{weniger als } 9 \text{ Treffer}) = 1 - P\,(9 \text{ oder } 10 \text{ Treffer})$

$$= 1 - \left(\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0\right)$$

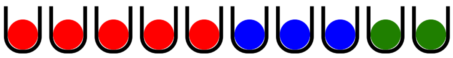
$$= 1 - (0.000000827 + 0.000000017) = 0.999999157 = 99.9999157\%$$

Urnenexperimente



Ziehen von n Kugeln mit
oder ohne zurücklegen

Reihenfolge spielt keine Rolle



$N = R + B + G =$ Kugeln total
$R =$ rote Kugeln
$B =$ blaue Kugeln
$G =$ grüne Kugeln

$n = r + b + g =$ gezogene Kugeln
$r =$ rote gezogene Kugeln
$b =$ blaue gezogene Kugeln
$g =$ grüne gezogene Kugeln

Wahrscheinlichkeit p um genau r rote, b blaue und g grüne Kugeln zu ziehen:

mit Zurücklegen:

$$\boxed{p = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{b} \cdot \binom{n-r-b}{g} \cdot {p_r}^r \cdot {p_b}^b \cdot {p_g}^g}$$

wobei: $p_r = \frac{R}{N},\ p_b = \frac{B}{N},\ p_g = \frac{G}{N}$

Die Formel gilt analog auch für eine andere Anzahl Kugelfarben. Für zwei verschiedene Farben entspricht sie dem Bernoulliexperiment.

ohne Zurücklegen:

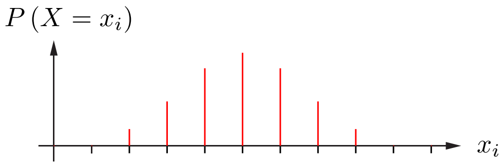
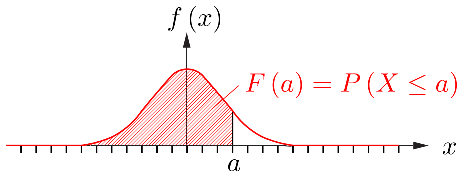
$$\boxed{p = \frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{B}{b} \cdot \binom{G}{r}}{\binom{N}{n}}}$$

Die Formel gilt analog auch für eine andere Anzahl Kugelfarben. Mit dieser Formel kann man auch die Wahrscheinlichkeiten beim Lotto n aus N berechnen.
z.B. Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige beim Schweizerzahlenlotto 6 aus 45:

$$P\,(4 \text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = 0.1635\%$$

Zufallsvariablen

Wird jedem Ergebnis eines Experiments eine Zahl zugeordnet, dann nennt man diese Zuordnung eine Zufallsvariable oder eine Zufallsgrösse (übliche Symbole für Zufallsgrössen: X, Y, Z).

	Diskrete Zufallsvariablen	**Stetige Zufallsgrössen**
Zufallsvariablen	$\boxed{X : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, x_3, \dots\}}$ (abzälbar) **Beispiele:** ◇ $X =$ Augensumme beim Würfeln ◇ $X =$ Anzahl Treffer einer Bernuoullikette	$\boxed{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}}$ (überabzählbar) **Beispiele:** ◇ $X =$ Zeitpunkt eines Unfalls ◇ $X =$ Oberfläche eines Regentropfens
Wahrscheinlichkeit	**Wahrscheinlichkeitsverteilung:** ◇ Als Formel: $\boxed{P(X = x_i) = \dots}$ ◇ Als Tabelle: $\begin{array}{c\|\|c\|c} x_i & x_1 & x_2 \\ \hline P(X{=}x_i) & P(X{=}x_1) & P(X{=}x_2) \end{array} \dots$	**Dichte:** $\boxed{f(x)}$ **Verteilungsfunktion:** $\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt}$ **Wahrscheinlichkeit:** $\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt = F(x_2) - F(x_1)}$
Grafische Darstellung		
Erwartungswert	$\boxed{E(X) = \mu = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)}$	$\boxed{E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\ dt}$
	◇ $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ ◇ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ◇ Falls X und Y unabhängig: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$	
Varianz	$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$	$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t)\ dt}$
	◇ $V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$ ◇ $V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$ ◇ $V(X + Y) = \begin{cases} V(X) + V(Y) & \text{für } X, Y \text{ unabh.} \\ V(X) + V(Y) + 2\left[E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)\right] & \text{allgemein} \end{cases}$	
Standardabweichung	$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)}}$	$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)}}$
Spezielle Verteilungen	◇ Gleichverteilung ◇ Binomialverteilung ◇ Poissonverteilung ◇ Hypergeometrische Verteilung ◇ Geometrische Verteilung	◇ Gleichverteilung ◇ Normalverteilung ◇ Exponentialverteilung
Ungleichung von Tschebycheff	$\boxed{P(\|X - \mu\| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}}$ oder $\boxed{P(\|X - \mu\| \leq c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}}$ Insbesondere: ◇ Der Wert einer Zufallsvariable liegt zu mindestens 75% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ ◇ Der Wert einer Zufallsvariable liegt zu mindestens 89% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	

Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung: $X_{\mathrm{G}(n)} : \Omega \to \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\boxed{p = P\left(X_{\mathrm{G}(n)} = k\right) = \frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\mu = E\left(X_{\mathrm{G}(n)}\right) = \frac{n+1}{2}}$$

$$\boxed{\sigma^2 = V\left(X_{\mathrm{G}(n)}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{12} \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{12}}}$$

Anwendung:

Beispiel:
Beim einmaligen Würfeln mit einem idealen Würfel ist die Augensumme gleichverteilt zum Parameter $n = 6$.

Binomialverteilung: $X_{\mathrm{B}(n,p)} : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$\boxed{P\left(X_{\mathrm{B}(n,p)} = k\right) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{\mu = E\left(X_{\mathrm{B}(n,p)}\right) = n \cdot p}$$

$$\boxed{\sigma^2 = V\left(X_{\mathrm{B}(n,p)}\right) = n \cdot p \cdot (1-p) \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Anwendung: Die Anzahl Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlickkeit p ist Binomialverteilt mit den Parametern n und p.

Approximation durch die Poissonverteilung: Für n sehr gross und p sehr klein (Faustformel: $p \leq 0.05$ und $n \geq 50$) kann die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung zum Parameter $\mu = n \cdot p$ angenährt werden:

$$\boxed{P\left(X_{\mathrm{B}(n,p)} = k\right) \approx \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}}$$

Approximation durch die Normalverteilung: Für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ kann die Wahrscheinlichkeit $P\left(k_1 \leq X_{\mathrm{B}(n,p)} \leq k_2\right)$ mit Hilfe der Standardnormalverteilung angenähert werden:

$$\boxed{P\left(X_{\mathrm{B}(n,p)} \leq k\right) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)} \qquad \boxed{P\left(X_{\mathrm{B}(n,p)} \geq k\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{P\left(k_1 \leq X_{\mathrm{B}(n,p)} \leq k_2\right) \approx \Phi\left(\frac{k_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{P\left(\left|X_{\mathrm{B}(n,p)} - \mu\right| \leq c\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1} \qquad \boxed{P\left(\left|X_{\mathrm{B}(n,p)} - \mu\right| \geq c\right) \approx 2 - 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)}$$

Poissonverteilung: $X_{\mathrm{P}(\lambda)} : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\boxed{P\left(X_{\mathrm{P}(\lambda)} = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$

$$\boxed{\mu = E\left(X_{\mathrm{P}(\lambda)}\right) = \lambda}$$

$$\boxed{\sigma^2 = V\left(X_{\mathrm{P}(\lambda)}\right) = \lambda \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\lambda}}$$

Anwendung 1: Die Häufigkeit eines völlig zufällig eintretenden Ereignis mit Erwartungswert μ ist Poissonverteilt zum Parameter μ.

Beispiel:
Auf einem Strassenstück ereignen sich im Jahr im Durchschnitt 10 Unfälle. Wenn X die Zufallsgrösse ist, welche die Anzahl Unfälle pro Tag angibt, dann ist X Poissonverteilt zum Parameter $\lambda = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}$ und es gilt: $P(X = k) = \frac{\left(\frac{1}{36}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{1}{36}}$

Anwendung 2: Annäherung einer Binomialverteilung (siehe Binomialverteilung).

Stetige Verteilungen

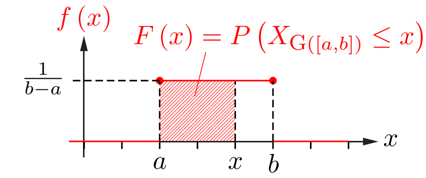
Gleichverteilung: $X_{G([a,b])} : \Omega \rightarrow [a,b]$

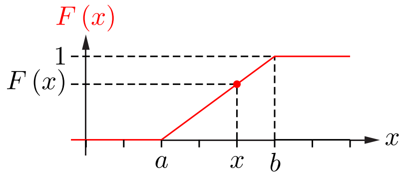
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} \cdot x - \dfrac{a}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

$$\mu = E\left(X_{G([a,b])}\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = V\left(X_{G([a,b])}\right) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \text{und} \qquad \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$





Anwendung:

Beispiel:
Möchte man mit einem Zug wegfahren, welcher im Halbstundentakt fährt und man zu einem völlig zufälligen Zeitpunkt zum Bahnhof geht, dann ist die Wartezeit in Minuten eine stetige gleichverteilte Zuvallsvariable für das Intervall $[0, 30]$.

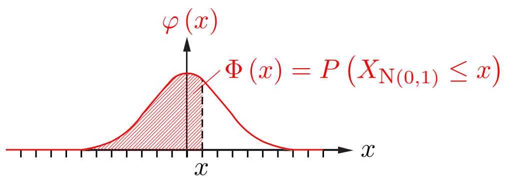
Normalverteilung: $X_{N(\mu,\sigma)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

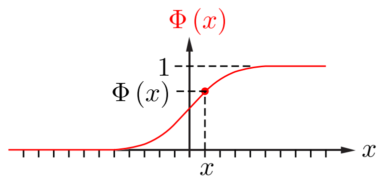
Standardnormalverteilung ($\mu = 0, \sigma = 1$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Die Verteilungsfunktion Φ kann nur näherungsweise ausgewertet werden, deshalb benutzt man entweder eine Tabelle (siehe nächste Seite) oder einen Taschenrechner.





$$\mu = E\left(X_{N(0,1)}\right) = 0$$

$$\sigma^2 = V\left(X_{N(0,1)}\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma = 1$$

Allgemeine Normalverteilung (μ, σ):

$$P\left(X_{N(\mu,\sigma)} \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad P\left(X_{N(\mu,\sigma)} \geq x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(x_1 \leq X_{N(\mu,\sigma)} \leq x_2\right) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\left|X_{N(\mu,\sigma)} - \mu\right| \leq c\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 \qquad P\left(\left|X_{N(\mu,\sigma)} - \mu\right| \geq c\right) = 2 - 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)$$

Anwendung 1:

Die Normalverteilung kommt in der Praxis recht häufig zumindest Näherungsweise vor.

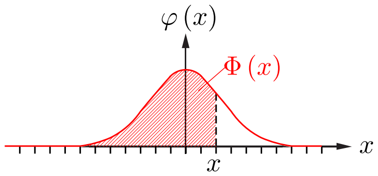
Beispiel:
Bei einer Produktion müssen Teile von einer bestimmten Länge gefertigt werden. Die tatsächlichen Längen weichen jedoch immer ein wenig von dieser Länge ab. Die Abweichung von der geforderten Länge ist normalverteilt mit $\mu = 0$ und einem vom Produktionsvorgang abhängenden σ.

Anwendung 2:

Annäherung der Binomialverteilung (siehe Binomialverteilung)

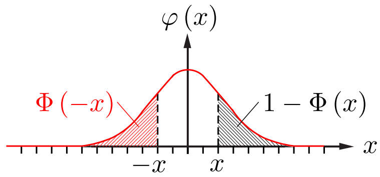
Die Verteilungsfunktion Φ für die Standardnormalvertilung

Positive Werte: $\Phi(x)$



Bsp: $\Phi(1.25) = 0.8944$

Negative Werte: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



Bsp: $\Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Einige besondere Werte:

x	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905
$\Phi(x)$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995

Beurteilende Statistik: Grundbegriffe

In der Beurteilenden Statistik versucht man, aus den bei mehrmaligen Durchführungen eines Zufallsexperimentes aufgetretenen Ergebnissen auf die unbekannte, dem Zufallsexperiment tatsächlich zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung zu schliessen.

- ◇ Stichprobe: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — Die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind Ergebnisse eines mehrmalig durchgeführten Zufallsexperiments mit der unbekannten Zufallsgrösse X.
- ◇ Stichprobenumfang: n — Anzahl der Messungen in einer Stichprobe.
- ◇ Mittelwert: $\overline{x}$ — $\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$
- ◇ Stichprobenvarianz: S^2 — $\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$
- ◇ Stichprobenmittel: $\overline{X}$ — Das Stichprobenmittel $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ gibt den Durchschnittswert an, wenn ein Zufallsexperiment mit der Zufallsgrösse X n mal wiederholt wird.
  Es gilt:

  $\boxed{\mu_{\overline{X}} = \mu_X}$

  $\boxed{\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2_X}{n}}$ bzw. $\boxed{\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$

  Das Stichprobenmittel ist für einen grossen Stichprobenumfang n angenähert normalverteilt, unabhängig von der Verteilung von X.
- ◇ μ_X schätzen: μ_X — $\boxed{\text{Schätzwert für } \mu_X \text{ ist } \overline{x}}$
- ◇ σ_X schätzen: σ_X — $\boxed{\text{Schätzwert für } \sigma_X \text{ ist } S}$
- ◇ p schätzen: $p = P(A)$ — $\boxed{\text{Schätzwert für } p(A) \text{ ist } h(A) = \frac{H(A)}{n}}$

Vertrauensintervall für den unbekannten Erwartungswert μ_X der Zufallsgrösse X

Der unbekannte Erwartungswert μ_X liegt mit der **Sicherheitswahrscheinlichkeit** γ im **Vertrauensintervall** $[\overline{x} - c_\gamma, \overline{x} + c_\gamma]$. Es gilt:

$$\boxed{\gamma = P\left(\left|\overline{X} - \mu_X\right| \leq c_\gamma\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{c_\gamma \cdot \sqrt{n}}{\sigma_X}\right) - 1} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\Phi\left(\frac{c_\gamma \cdot \sqrt{n}}{\sigma_X}\right) = \frac{1+\gamma}{2}}$$

Damit lässt sich aus einem gegebenen γ der Wert c_γ oder umgekehrt bestimmen. Falls σ_X nicht bekannt ist, kann man den Schätzwert S benutzen.

Vertrauensintervall für eine unbekannte Wahrscheinlickkeit $p = p(A)$

Die unbekannte Wahrscheinlichkeit $p = p(A)$ eines Ereignisses A liegt mit der **Sicherheitswahrscheinlichkeit** γ im **Vertrauensintervall** $[p_1, p_2]$.

Vorgehen für die Ermittlung der Intervallsgrenzen p_1, p_2:

1) Bestimme den Stichprobenumfang n, die relative Häufigkeit $h = h(A)$ und die Sicherheitsw'keit γ.
2) Welcher Wert für c ergibt sich aus $\boxed{\Phi(c) = \frac{1+\gamma}{2}}$?
3) Welche Intervallsgrenzen p_1 und p_2 ergeben sich aus $\boxed{(h-p)^2 \leq c^2 \cdot \frac{p(1-p)}{n}}$ (nach p auflösen).