Finanzmathematik I: Einfache Verzinsung, Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung

ohne Raten

Einfache Verzinsung

Zinsformel:

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot n$$ für n Jahre

$$Z_t = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}$$ für t Tage

Endwertformel:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$ für n Jahre

$$\boxed{K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)}$$ für t Tage

Effektiver Zinssatz bei Skonto:

$$i_{\text{eff}} = \frac{s}{1-s} \cdot \frac{360}{t}$$

$t =$ Kontobezugsspanne
$s =$ Skontosatz

Mittlerer Zahlungstermin:

$$t = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \cdots + K_m t_m}{K_1 + K_2 + \cdots + K_m}$$

Zinseszinsrechnung

Endwertformel:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1+i)^n}$$ für n Jahre

Unterjähriger Zinszuschlag:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i_p)^{m \cdot t}$$

$m =$ Zinsperioden pro Jahr
$i_p =$ Periodenzinssatz

wobei für den Periodenzinssatz i_p gilt:

nominelle Verzinsung: $$i_p = i_{\text{rel}} = \frac{i_{\text{nom}}}{m}$$

effektive Verzinsung: $$i_p = i_{\text{kon}} \quad \text{mit} \quad (1 + i_{\text{kon}})^m = 1 + i_{\text{eff}}$$

stetige Verzinsung:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i \cdot t}, \qquad i_{\text{eff}} = e^i - 1$$ stetiges Wachstum

$$K_t = K_0 \cdot e^{-i \cdot t}, \qquad i_{\text{eff}} = 1 - e^{-i}$$ stetiger Zerfall

Inflation, Realverzinsung:

$$G_n = G_0 \cdot (1 + i_{\text{infl}})^n$$ kaufkraftgleicher späterer Betrag G_n

$$K_{n,0} = K_0 \cdot \left(\frac{1 + i_{\text{nom}}}{1 + i_{\text{infl}}}\right)^n$$ Realwert $K_{n,0}$ auf Basis Anlagezeitpunkt

$$i_{\text{real}} = \frac{i_{\text{nom}} - i_{\text{infl}}}{1 + i_{\text{infl}}}$$

$i_{\text{nom}} =$ Nominalverzinsung
$i_{\text{infl}} =$ Inflationsrate
$i_{\text{real}} =$ Realverzinsung

mit Raten (Rentenrechnung)

Jahresersatzrate bei nachschüssigen Raten:

$$R^* = m \cdot r \left(1 + i \cdot \frac{m-1}{2m}\right)$$

$r =$ Rate
$m =$ Anzahl Raten

Jahresersatzrate bei vorschüssigen Raten:

$$R^* = m \cdot r \left(1 + i \cdot \frac{m+1}{2m}\right)$$

$r =$ Rate
$m =$ Anzahl Raten

Nachschüssige Rente:

$$\boxed{R_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$ $R_n =$ Endwert

$$R_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$ $R_0 =$ Barwert

Vorschüssige Rente:

$$\boxed{R'_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q}$$ $R'_n =$ Endwert

$$R'_0 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$$ $R'_0 =$ Barwert

Ewige Rente (nachschüssig):

$$R_0^\infty = \frac{R}{i}$$ $R_0^\infty =$ Barwert

Rentenperiode grösser als Zinsperiode (nach.):

$$R_n = R \cdot \frac{(1 + i_p)^{m \cdot n} - 1}{(1 + i_p)^m - 1}$$

$n =$ Anzahl Rentenperioden
$m =$ Anzahl Zinsperioden pro Rentenperiode

$$r = R \cdot \frac{i_p}{(1 + i_p)^m - 1}$$ $r =$ konforme Ersatzrate

Zinsperiode grösser als Rentenperiode:

ISMA: *(effektiv)* $$q = 1 + i_{\text{kon}}$$

US: *(nominell)* $$q = 1 + i_{\text{rel}}$$

$$R_k = R \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

$$R'_k = R \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} \cdot q$$

$k =$ Anzahl Raten

360-TM: *(einfach)* $$R_n = R^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ $R^* =$ Jahresersatzrate

Veränderliche Raten (nachschüssig):

Arithmetisch: $R =$ erste Rate, $d = R_t - R_{t-1}$

$$K_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{d}{q - 1} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n\right)$$

$$K_0^\infty = \frac{R}{q - 1} + \frac{d}{(q - 1)^2}$$

Geometrisch: $R =$ erste Rate, $c = \frac{R_t}{R_{t-1}}$

$$K_n = R \cdot \frac{q^n - c^n}{q - c}$$

$$K_0^\infty = \frac{R}{q - c}, \qquad q > c$$