



Aufgaben

Primzahlen, ggT und kgV

(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)

1 Primzahlen, ggT und kgV

1.1 Ziel des Auftrags

Nach der Bearbeitung dieses Auftrags teils sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

- Was ist eine Primzahl?
- Wie kann man prüfen, ob eine Zahl eine Primzahl ist?
- Wie bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung einer Zahl?
- Was ist der "grösste gemeinsame Teiler" (ggT) von zwei Zahlen?
- Was ist das "kleinste gemeinsame Vielfache" (kgV) von zwei Zahlen?
- Welche Anwendungen von kgV und ggT kommen Ihnen im Zusammenhang mit Bruchrechnen in den Sinn?

1.2 Theorie

1.2.1 Primzahlen

Was ist eine Primzahl? Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und sich selber (ganzzahlig) geteilt werden kann. Um zu testen, ob eine Zahl eine Primzahl ist, prüft man, ob die Zahl durch irgendeine andere Zahl teilbar ist. Zum Beispiel ist 39 keine Primzahl, da 39 durch 1, 3, 13 und 39 geteilt werden kann. Andererseits ist 17 eine Primzahl, denn die einzigen Teiler von 17 sind 1 und 17. Folgende Zahlen sind alle Primzahlen zwischen 1 und 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Primfaktorzerlegung: Jede Zahl kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. z.B.:

$$7800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

Wenn wir eine Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen, nennen wir das die Primfaktorzerlegung der Zahl. Wie Sie die Primfaktorzerlegung einer Zahl finden, können Sie an folgendem Beispiel nachvollziehen:

Beispiel: Es soll die Primfaktorzerlegung von 7800 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 7800 \div 2 &= 3900 && \Rightarrow && 2 \text{ ist ein Faktor der Primfaktorzerlegung} \\ 3900 \div 2 &= 1950 && \Rightarrow && 2 \text{ kommt ein zweites mal in der Primfaktorzerlegung vor} \\ 1950 \div 2 &= 975 && \Rightarrow && 2 \text{ kommt ein drittes mal in der Primfaktorzerlegung vor} \\ 975 \div 2 &= \text{geht nicht auf} && \Rightarrow && 2 \text{ kommt kein weiteres mal in der Primfaktorzerlegung vor} \\ 975 \div 3 &= 325 && \Rightarrow && 3 \text{ ist ein Faktor der Primfaktorzerlegung} \\ 325 \div 3 &= \text{geht nicht auf} && \Rightarrow && 3 \text{ kommt kein weiteres mal in der Primfaktorzerlegung vor} \\ 325 \div 5 &= 65 && \Rightarrow && 5 \text{ ist ein Faktor der Primfaktorzerlegung} \\ 65 \div 5 &= 13 && \Rightarrow && 5 \text{ kommt ein zweites mal in der Primfaktorzerlegung vor} \\ 13 &\text{ ist eine Primzahl} && \Rightarrow && 13 \text{ ist der letzte Faktor der Primfaktorzerlegung} \end{aligned}$$

Die Primfaktorzerlegung von 7800 lautet also:

$$7800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

Wie Sie in diesem Beispiel sehen, wird die zu untersuchende Zahl solange durch die Primzahlen geteilt, wie die Rechnung aufgeht. Dabei beginnen wir mit der kleinsten Primzahl, nämlich 2 und fahren dann mit der nächstgrösseren Primzahl fort, bis am Schluss nur noch eine Primzahl übrig bleibt.

1.2.2 Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

Was ist der ggT? Der ggT von zwei Zahlen ist die grösste Zahl, durch welche die beiden gegebenen Zahlen geteilt werden können.

Gesucht ist zum Beispiel der ggT von 56 und 84:

$$\begin{aligned} \text{Teiler von 56: } &1, 2, 4, 8, 14, 28, 56 \\ \text{Teiler von 84: } &1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen haben mehrere gemeinsame Teiler, nämlich 1, 2, 4, 14 und 28. Der grösste und damit der ggT von 56 und 84 ist natürlich 28.

Wie bestimmt man den ggT zweier Zahlen? Um den ggT von zwei Zahlen zu bestimmen, bestimmt man zuerst die Primfaktorzerlegungen der beiden Zahlen. Dann schauen wir, welche Faktoren in beiden Zerlegungen vorkommen. Diese Faktoren multiplizieren wir und erhalten so den ggT. Also in unserem Beispiel würde das so gehen:

$$\begin{aligned} 56 &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{7} \\ 84 &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{7} \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Zahlen kommen in beiden Faktorzerlegungen vor. Wir multiplizieren sie und erhalten somit den ggT:

$$\text{ggT von 56 und 84} = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$$

Anwendung vom ggT: Kürzen eines Bruchs Wie Sie wissen, kann man gewisse Brüche durch Kürzen vereinfachen. Kürzen bedeutet, den Zähler und den Nenner eines Bruchs durch die selbe Zahl zu dividieren. Ein Beispiel:

$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2} \quad (\text{Kürzen mit 12})$$

Wenn wir einen Bruch gegeben haben, stellt sich die Frage, kann man ihn kürzen und wenn ja, mit welcher Zahl. Da Kürzen heisst, den Zähler und den Nenner durch dieselbe Zahl zu teilen, suchen wir einen gemeinsamen Teiler. Der grösste (und damit beste) solche Teiler ist natürlich der ggT von Nenner und Zähler.

1.2.3 Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Was ist kgV? Das kgV von zwei Zahlen ist die kleinste Zahl, die sich durch die beiden Zahlen teilen lässt.

Als Beispiel suchen wir das kgV von 12 und 16.

Vielfache von 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...

Vielfache von 16: 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, ...

Die beiden Zahlen haben mehrere gemeinsame Vielfache: 48, 96, ... Das kleinste und damit das kgV von 12 und 16 ist natürlich 48.

Wie bestimmt man das kgV zweier Zahlen? Um das kgV von zwei Zahlen zu bestimmen, kann man zuerst den ggT berechnen. Dann multipliziert man die beiden Zahlen miteinander und dividiert das Resultat durch den ggT. Das Ergebnis ist das gesuchte kgV. Also in unserem Beispiel: Der ggT von 12 und 16 ist 4. Damit berechnen wir das kgV:

$$\text{kgV von 12 und 16} = \frac{12 \cdot 16}{4} = 48$$

Anwendung vom kgV: gleichnamig machen von Brüchen Wenn Sie zwei Brüche addieren wollen, müssen Sie zuerst dafür sorgen, dass die beiden Brüche den gleichen Nenner haben, man nennt das "gleichnamig machen". Dazu müssen Sie die beiden Brüche erweitern. Erweitern bedeutet, Nenner und Zähler des Bruchs mit derselben Zahl multiplizieren. Zum Beispiel:

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{16} = \frac{20}{48} + \frac{3}{48} = \frac{23}{48}$$

Wir haben den ersten Bruch mit 4 erweitert, den zweiten mit 3. Damit haben wir einen gemeinsamen Nenner, nämlich 48 erhalten. Das kgV der Nenner von den beiden Brüchen gibt uns an, welches der kleinstmögliche gemeinsame Nenner ist.

1.3 Aufgaben

Geben Sie bei der Lösung der Aufgaben alle Zwischenschritte an.

Aufgabe 1.1: Prüfen Sie, ob folgende Zahlen Primzahlen sind:

a) 27 b) 41 c) 137 d) 28092 e) 389485

Aufgabe 1.2: Geben Sie die Primfaktorzerlegungen der folgenden Zahlen an:

a) 256, b) 41 c) 4420

Aufgabe 1.3:

- Bestimmen Sie den ggT von 15288 und 13860
- Überlegen Sie sich, wie Sie den ggT von 3 Zahlen bestimmen können.
Bestimmen Sie den ggT von 378, 72 und 1386
- Bestimmen Sie das kgV von 616 und 2940
- Überlegen Sie sich, wie Sie das kgV von 3 Zahlen bestimmen können.
Bestimmen Sie das kgV von 39, 132 und 420

Aufgabe 1.4:

Ordnen Sie folgende Brüche Ihrer Grösse nach ein: $\frac{3}{20}$, $\frac{11}{75}$ und $\frac{1}{7}$