Beweis der Logarithmus-Gesetze

1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

Beweis:

Definiere: $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$

$\Rightarrow u = a^x$ und $v = a^y$

Damit:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x+y = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$\blacksquare$

2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

Beweis:

Definiere: $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$

$\Rightarrow u = a^x$ und $v = a^y$

Damit:

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a(a^{x-y}) = x-y = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$\blacksquare$

3) $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

Beweis:

Definiere: $x = \log_a(b)$

$\Rightarrow b = a^x$

Damit:

$$\log_a(b^n) = \log_a((a^x)^n) = \log_a(a^{x \cdot n}) = x \cdot n = \log_a(b) \cdot n$$

$\blacksquare$