Exponetialgleichungen *(Gleichungen, bei denen die Lösungsvariable x im Exponent vorkommt)*

Typ 1: Grundform

$$\boxed{a^x = b}$$

1. Lösungsvariante:
(mit Hilfe der Definition und des Basiswechselsatzes)

$$\begin{aligned} a^x &= b && |\text{Definition} \\ \log_a b &= x && |\text{Basiswechselsatz} \\ x &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \end{aligned}$$

2. Lösungsvariante:
(Gleichung logarithmieren und 2. Log-Gesetz anwenden)

$$\begin{aligned} a^x &= b && |\log_{10} \\ \log_{10} a^x &= \log_{10} b && |\text{2. Log-Gesetz} \\ x \cdot \log_{10} a &= \log_{10} b && |\div \log_{10} a \\ x &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \end{aligned}$$

Typ 3: Summe von Potenzen, die durch Ausklammern in ein Produkt umgewandelt werden kann

z.B. $\boxed{a^{x+1} + a^{x+2} = b}$

Wichtig: Die Basis der Potenz muss übereinstimmen und der Summand im Exponent mit dem x muss übereinstimmen

Lösungsvariante:
(1. Potenzgesetz anwenden und dann die Potenz mit der Lösungsvariable ausklammern)

$$\begin{aligned} a^{x+1} + a^{x+2} &= b && |\text{1. Potenzgesetz} \\ a^x \cdot a^1 + a^x \cdot a^2 &= b && |\text{Ausklammern} \\ a^x \left(a + a^2\right) &= b && |\div \left(a + a^2\right) \\ a^x &= \frac{b}{a + a^2} \end{aligned}$$

Das ist nun eine Gleichung vom Typ 1 und kann wie dort beschrieben aufgelöst werden.

Typ 2: Produkte von Potenzen, welche nicht weiter zusammengefasst werden können

z.B. $\boxed{a^x \cdot b^{x^2} = c}$

Lösungsvariante:
(Gleichung logarithmieren und Log-Gesetze anwenden)

$$\begin{aligned} a^x \cdot b^{x^2} &= c && |\log_{10} \\ \log_{10}\left(a^x \cdot b^{x^2}\right) &= \log_{10} c && |\text{1. Log-Gesetz} \\ \log_{10} a^x + \log_{10} b^{x^2} &= \log_{10} c && |\text{2. Log-Gesetz} \\ x \cdot \log_{10} a + x^2 \cdot \log_{10} b &= \log_{10} c \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist eine Quadratische Gleichung entstanden, die nun wie üblich gelöst werden kann.

Bemerkung:
Im Prinzip kann jede Exponentialgleichung, welche nur Produkte von Potenzen enthält (keine Summen oder Differenzen) auf diese Weise in einen anderen Gleichungsyp umgewandelt werden. Es lohnt sich aber zu prüfen, ob man nicht mit Hilfe der Potenzgesetze vor dem Logarithmiren Potenzen zusammnfassen könnte.

Typ 4: Summe, welche durch Substituieren auf eine Quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann

z.B. $\boxed{a^{2x} + a^x = b}$

Wichtig: Die beiden vorkommenden Summanden mit der Unbekannten x müssen gleiche Basis haben und der Exponent des einen Summanden muss genau doppelt so gross sein, wie der des anderen, z.B. a^x und a^{2x}, a^x und $\sqrt{a^x} = a^{\frac{1}{2}x}$, 3^x und $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x}$,...

Lösungsvariante:
(Potenzgesetz anwenden und danach substituieren)

$$\begin{aligned} a^{2x} + a^x &= c && |\text{3. Potenzgesetz} \\ \left(a^x\right)^2 + a^x &= c && |\text{Substituiere } z = a^x \\ z^2 + z &= c && |\text{Berechne } z \\ z &= \ldots && |\text{Rücksubstitution (nur für } z > 0) \\ a^x &= z \end{aligned}$$

Das ist nun eine Exponentialgleichung vom Typ 1, die wie dort beschrieben gelöst werden kann.

Potenzgesetze:

1. Gleiche Basis:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

2. Gleicher Exponent:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

3. mehrmaliges Potenzieren:

$$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarithmus:

Definition:
$\log_a b = x$ ist gleichbedeutend $a^x = b$

1. Log-Gesetz: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

2. Log-Gesetz:
$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

Basiswechselsatz: $\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\ln b}{\ln a}$