

# Quadratische Gleichungen

Allgemein:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante:  $D = b^2 - 4ac$

$D > 0 \Rightarrow$  2 Lösungen

$D = 0 \Rightarrow$  1 Lösung

$D < 0 \Rightarrow$  0 Lösungen

$$ax^2 + c = 0 \quad (\text{d.h. } b=0)$$

Ganz normal auflösen:

$$ax^2 + c = 0 \quad | -c$$

$$ax^2 = -c \quad | :a$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$ax^2 + bx = 0 \quad (\text{d.h. } c=0)$$

x ausklammern:

$$x(ax + b) = 0$$

•  $x = 0$

•  $ax + b = 0 \quad | -b$

$$ax = -b \quad | :a$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Alternative zur Lösungsformel: Quadratisch Ergänzen

Rezept:

Schritt 1: Dividieren, so dass  $a=1$

Schritt 2: Quadratisch Ergänzen: Füge „ $+\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ “ ein.

Schritt 3: Binomische Formel:  $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

Schritt 4: Löse nach x auf.

Beispiel:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = 0 \quad | + \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4} \quad | + \frac{5}{4}$$

$$x = \pm \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Alternative zur Lösungsformel: Faktorisieren (geht nur für ganzzahlige Lösungen gut)

Rezept:

Schritt 1: Dividieren, so dass  $a=1$   
(falls b, c nicht ganzzahlig  $\rightarrow$  Formel)

Schritt 2: Faktorisieren (Binomische Formel, Probieren)

Schritt 3: Faktoren = 0 setzen

Beispiel:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

•  $x = 1$

•  $x = -3$

Gleichungen, die auf Quadratische Gleichungen führen:

• x in jedem Summanden: z.B.  $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$

$\hookrightarrow$  x ausklammern und Faktoren einzeln = 0 setzen

• Biquadratische Gleichung: z.B.  $x^4 + 3x^2 - 2 = 0$

$\hookrightarrow$  Substitution:  $u = x^2$

• Weitere Substitutionen: z.B.  $\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - 5 = 0 \quad | u = \frac{1}{x-1}$

$$u^2 + 2u - 5 = 0$$

...