QUADRATWURZELN

Regeln:
- $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a^2} = a$ (nur für positive a, sonst Betragsstriche)
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}}$!!

Potenzgesetze:
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

Binomische Formeln:
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Wurzeln aus Zahlen:
- Quadratzahlen: $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$
- keine Quadratzahlen: $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\cdot\sqrt{2}$
  ↳ Strategie: Zerlege die Zahl unter der Wurzel in ein Produkt, so dass der eine Faktor eine möglichst grosse Quadratzahl ist. ← Teilweise radizieren
- Brüche: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
  ↳ Strategie: Ziehe aus Zähler und Nenner einzeln die Wurzel

- Kommazahlen: $\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$

  ↳ Strategie: Wandle die Kommazahl in einen Bruch um.

- Grosse Zahlen: $\sqrt{1764} = \sqrt{4 \cdot 441} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 49} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

  ↳ Strategie: Zerlege die Zahl in ein Produkt, wenn möglich von Quadratzahlen.

- Produkte von Wurzeln: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

  ↳ Können bei einem Produkt (Bruch) von Wurzeln die einzelnen Wurzeln nicht vereinfacht werden, kann man das Produkt (Bruch) unter eine Wurzel nehmen.

„Wurzeln aus Variablen"

- Quadrate: $\sqrt{a^2} = |a|$
- Gerade Exponenten: $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = a^2$ ← Betrag nicht notwendig da a^2 sowieso ≥ 0 ist.

  $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|$
- Ungerade Exponenten: $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{(a^2)^2 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$

  $\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{(a^3)^2 \cdot a} = a^3 \cdot \sqrt{a}$

  Betrag nicht notwendig, da $a \geq 0$ sein muss, da sonst in der Ausgangswurzel eine negative Zahl unter der Wurzel wäre.

Wurzeln aus Produkten und Brüchen:

↳ Strategie: ziehe aus jedem Faktor die Wurzel einzeln

$$\sqrt{\frac{32a^3b}{c^3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b}{c^2 \cdot c}} = \frac{4a}{c} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

kein Betrag notwendig, da $a, c \geq 0$ (siehe Ausgangswurzel)

Wurzeln aus Summen und Differenzen:

↳ Strategie: Versuche die Summe/Differenz in Faktoren zu zerlegen (Ausklammern, Binomische Formeln, Teilsummen, Probieren)

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$$
$$\sqrt{a^3-a^2b} = \sqrt{a^2(a-b)} = |a|\cdot\sqrt{a-b}$$

Produkte/Brüche von mehreren Wurzeln:

↳ Können bei einem Produkt (Bruch) von Wurzeln die einzelnen Wurzeln nicht vereinfacht werden, kann man das Produkt (Bruch) unter eine gemeinsame Wurzel nehmen.

$$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a^3} = \sqrt{2a\cdot 8a^3} = \sqrt{16a^4} = 4a^2$$
$$\frac{\sqrt{50b^3}}{\sqrt{18b}} = \sqrt{\frac{50b^3}{18b}} = \sqrt{\frac{25b^2}{9}} = \frac{5b}{3}$$

Faktoren in Wurzel reinziehen:

↳ Nimmt man einen Faktor, der vor der Wurzel steht, unter die Wurzel hinein, muss er ins Quadrat gesetzt werden. Man darf das nur mit Faktoren ≥ 0 machen.

Dieses Vorgehen ist sinnvoll, wenn in der Wurzel ein Bruch steht, welchen man mit dem Faktor ausserhalb der Wurzel kürzen könnte.

$$a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}} = \sqrt{a\cdot b}$$
$$(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

bei beiden muss vorausgesetzt werden das der Faktor ≥ 0 ist.

Nenner Wurzelfrei machen:

- Nenner ist eine Wurzel (oder ein Produkt)

↳ Strategie: Erweitere den Bruch mit der Nennerwurzel

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

- Nenner ist eine Summe, und ein Summand (oder mehrere) sind Wurzeln:

↳ Strategie: Erweitere nach der 3. Binomischen Formel:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

müssen verschieden sein.

Summe von Bruchtermen mit Wurzeln im Nenner:

↳ Strategie:
1. Mache alle Nenner wurzelfrei
2. Mache gleichnamig
3. Nimm alles auf einen Bruch und vereinfache

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} - \frac{1\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x\sqrt{x}+\sqrt{x}) - x(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{x(x-1)}$$

Einfache Quadratische Gleichungen: (x unter dem Quadrat)

↳ Strategie: Bringe das Quadrat alleine auf eine Seite und ziehe die Wurzel

$$x^2 + 2 = 6 \quad | -2$$
$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$
$$\mathbb{L} = \{-2, 2\}$$

$$(x-3)^2 - 2 = 7 \quad | +2$$
$$(x-3)^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x - 3 = \pm 3 \quad | +3$$
$$x = \pm 3 + 3$$
$$x_1 = +3 + 3 = 6$$
$$x_2 = -3 + 3 = 0$$
$$\mathbb{L} = \{0, 6\}$$

Wurzelgleichungen: (x unter einer oder mehreren Wurzeln)

↳ Strategie: Bringe die Wurzel alleine auf eine Seite und Quadriere → Probe unerlässlich.
Bei mehreren Wurzeln wiederhole das für jede Wurzel.

$$5\sqrt{x^2-1} - 4x = 0 \quad | +4x$$
$$5\sqrt{x^2-1} = 4x \quad | \text{ Quadrieren}$$
$$25 \cdot (x^2-1) = 16x^2 \quad | \text{ Termumformung}$$
$$25x^2 - 25 = 16x^2 \quad | -16x^2 + 25$$
$$9x^2 = 25 \quad | \div 9$$
$$x^2 = \frac{25}{9} \quad | \sqrt{\ }$$
$$x = \pm \frac{5}{3}$$

Probe für $x=\frac{5}{3}$: $LS = 5\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1} - 4\cdot\frac{5}{3} = 5\cdot\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{9}{9}} - \frac{20}{3}$

$= 5\cdot\sqrt{\frac{16}{9}} - \frac{20}{3} = 5\cdot\frac{4}{3} - \frac{20}{3} = 0$ ✓

$RS = 0$

Probe für $x=-\frac{5}{3}$: ✓ (Rechnung wie oben)

$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}}}$

Wurzeln aus Zahlen von 100 bis 10'000 raten:

100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Endziffern:	1	~~2~~	~~3~~	4	5	6	~~7~~	~~8~~	9	0
	↓			↓	↓	↓			↓	↓
	1,9			2,8	5	4,6			3,7	0

Strategie: Wurzeln von Zahlen zwischen 100 und 10'000 ergeben 2-stellige Zahlen.

↓ nur geeignet, wenn es schön aufgeht

Schritt 1: Zwischen welchen „schönen" Quadratzahlen liegt die Zahl unter der Wurzel
⇒ vordere Ziffer

Schritt 2: Aus der letzten Ziffer der Zahl unter der Wurzel kann man die zweite Ziffer ablesen, wobei es manchmal 2 Möglichkeiten gibt.

Schritt 3: Überprüfe durch Quadrieren des Resultats

$\sqrt{5329} = \underline{\underline{73}}$ denn:
- 5329 liegt zwischen 4900 und 6400
- Endziffer ist 9, dh. unsere zweite Ziffer ist 3 oder 7
- Überprüfen ergibt: $73^2 = 5329$