

# Eidgenössische Maturitätsprüfung

## Mathematik Normales Niveau

### Herbst 1993, Basel



www.mathenachhilfe.ch  
info@mathenachhilfe.ch  
079 703 72 08

- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 müssen mindestens 45 Punkte erzielt werden.
- Zeitbudget: 5 mal 48 Minuten

#### Aufgabe 1

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2}x$  sind gegeben.

- Berechne die Nullstellen, die Extremalstellen und den Wendepunkt von  $f$  und stelle  $f$  und die Gerade grafisch dar.
- Beweise, dass die Gerade die Funktion  $f$  berührt.
- Berechne den Inhalt der Fläche, welche die Gerade und  $f$  zusammen begrenzen.
- Es gibt noch eine zweite Ursprungsgerade, welche zusammen mit  $f$  genau ein Flächenstück von endlichem Inhalt begrenzt. Wie gross ist die Steigung?

#### Aufgabe 2

Von einem Dreieck  $ABC$  kennt man die Ecken  $A(-3/-9)$  und  $B(21/1)$  während die Ecke  $C$  auf der Geraden mit der Gleichung  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$  liegt.

- Warum hat die Lage von  $C$  auf der Geraden  $g$  keinen Einfluss auf den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ ? Berechne diesen Flächeninhalt.
- Das Dreieck  $ABC$  soll nun rechtwinklig sein mit der Seite  $AB$  als Hypotenuse. Berechne die möglichen Ecken  $C$  (Resultate auf 2 Dezimalstellen runden).
- Konstruiere das Dreieck  $ABC$  derart, dass der Winkel bei  $C$   $30^\circ$  beträgt.

### Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2 \ln x$  auf dem Intervall  $[1, e]$ .

- Gib die Gleichung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  an, und zeichne die Graphen beider Funktionen im Koordinatensystem.  
Welches Intervall wird durch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  auf das Intervall  $[1, e]$  abgebildet?
  - Bestimme für den allgemeinen Punkt  $P(u/2 \ln u)$  des Graphen von  $f$  die Gleichung der Kurventangente.
  - Jede Tangente im Intervall  $[1, e]$  des Graphen von  $f$  begrenzt mit der  $x$ -Achse und den beiden Vertikalen  $x = 1$  und  $x = e$  eine Trapezfläche. Welche dieser Tangenten ergibt ein Trapez mit extremalem Flächeninhalt? Kläre ab, ob dieser Extremalwert ein Maximum oder Minimum ist.
- 

### Aufgabe 4

Die Gerade  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  sowie die Punkte  $A(5/-2)$  und  $B(14/10)$  sind gegeben.

- Bestätige, dass  $A$  und  $B$  auf  $g$  liegen.
  - Berechne die Punkte auf  $g$ , welche von  $A$  doppelt so weit entfernt sind wie von  $B$ .
  - Zeige, dass die Menge aller Punkte  $P(x/y)$  der Ebene, welche von  $A$  doppelt so weit entfernt sind wie von  $B$ , einen Kreis  $k$  darstellt.  
Berechne den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises  $k$ .
  - Wie viele Kreise gibt es, die beide Koordinatenachsen und den in c) gefundenen Kreis  $k$  berühren? Berechne Mittelpunkt und Radius des kleinsten von ihnen. (Falls in c) der Kreis  $k$  nicht gefunden wurde, kann anstatt  $k$  der Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(11/13)$  und dem Radius  $R = 5$  verwendet werden.)
- 

### Aufgabe 5

5.1 In welchem Abstand vom Erdmittelpunkt befindet sich ein Satellit, wenn die Erdkugel unter einem Winkel von  $10^\circ$  erscheint? (Erdradius  $R_E = 6370$  km)

Welcher Bruchteil der Erdoberfläche ist aus dieser Entfernung sichtbar?

5.2 Ein idealer Würfel wird dreimal geworfen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augenzahl beim dritten Wurf gleich der Summe der Augenzahlen der beiden ersten Würfe?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Augenzahlen 15?