Eidgenössische Maturitätsprüfung
Mathematik Normales Niveau
Herbst 1994, St. Gallen

www.mathenachhilfe.ch
info@mathenachhilfe.ch
079 703 72 08

- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Resultate sollen nach Möglichkeit exakt angegeben werden, d.h. Wurzeln, gekürzte Brüche, π, ... stehenlassen. Dezimalbrüche sind auf 3 wesentliche Ziffern zu runden.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 braucht die maximale Punktsumme nicht erreicht zu werden.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$.

a) Bestimme die Gleichungen der Asymptoten, die Koordinaten des Extremums und skizziere den Kurvenverlauf (Einheit 1 cm).

b) Die Kurve begrenzt im 1. Quadranten mit der x-Achse und einer Asymptote eine ins unendlich reichende Fläche. Berechne den endlichen Inhalt dieser Fläche.

c) Berechne die x-Koordinate derjenigen Kurvenpunkte, deren Abstand vom Ursprung minimal ist.

Aufgabe 2

2.1 Die drei Punkte $A(4/0)$, $B(5/7)$ und $C(-4/4)$ bestimmen ein Dreieck.

a) Wie gross ist dessen Fläche?

b) Wie lautet die Gleichung des Umkreises dieses Dreiecks?

c) Die drei Punkte lassen sich auf drei Arten zu einem Parallelogramm ergänzen (Orientierung beliebig).
Wie lauten die Koordinaten der neuen Eckpunkte D_1, D_2 und D_3 ?

2.2 Zwei Zylindrische Glasgefässe haben den Innendurchmesser $2R$, die Höhe H und seien zur Hälfte mit Wasser gefüllt.

a) In das eine Gefäss wirft man eine Metallkugel vom Radius R, ins andere vier Metallkugeln vom Radius $0.5R$. in welchem Gefäss steigt das Wasser höher? Berechne den Niveauunterschied.

b) In einem anderen Versuch stellt man einen Metallzylinder (Radius x, Höhe H) in einen der beiden Glaszylinder. Dabei steigt das Wasser genau bis zum oberen Rand.
Wie gross ist x ?

Aufgabe 3

3.1 Die Koordinatengleichung $y^2 = x^2$ und die Funktion $y = ax^2$ begrenzen eine 2-teilige Figur mit endlichem Flächeninhalt.

a) Zeichne diese Figur für $a = \frac{1}{2}$. Einheit 2 cm.

b) Wie gross muss a sein, damit der Flächeninhalt 6 Einheiten beträgt?

3.2 Betrachte die Exponentialfunktion $y = e^x$ mit Punkt $P\,(u/e^u)$ samt zugehörender Tangente t.

Die Parallele zur x-Achse durch P bildet zusammen mit der y-Achse und der Tangente ein rechtwinkliges Dreieck.

Bestimme u so, dass diese Dreiecksfläche extremal wird.

Aufgabe 4

Zwei Geraden g und h sowie der Punkt $P\,(-3/7)$ sind gegeben. Von g kennt man die Normalengleichung $3x + 4y + 6 = 0$; von h sei die Parametergleichung gegeben:

$$h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

b) P sei Ecke eines Rechtecks $PQRS$, wobei Q auf h und die Punkte R und S auf g liegen.

Wie gross ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?

c) Stelle die Normalengleichung derjenigen Winkelhalbierenden von g und h auf, die nicht im Winkelfeld von P liegt.

Aufgabe 5

5.1 In einer Urne liegen 5 schwarze und eine rote Kugel. Man zieht jeweils eine Kugel; ist sie rot, legt man sie wieder zurück, ist sie schwarz, entfernt man sie und legt eine rote Kugel in die Urne zurück. Es wird dreimal nach dieser Vorschrift gezogen.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine rote Kugel gezogen wird?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine rote Kugel dabei ist?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das höchstens eine schwarze Kugel gezogen wird?

5.2 Ein Kreissektor sei durch seinen Zentriwinkel 2α und den Radius R gegeben. Berechne die Seite des einbeschriebenen Quadrates, von dem 2 Ecken auf dem Kreisbogen und je eine weitere auf einem Schenkel liegen sollen. (Falls die Aufgabe für den allgemeinen Winkel α nicht gelöst werden kann, kann $\alpha = 45°$ gewählt werden.)