Fragen und Antworten

Folgen und Reihen

(bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen **2**
1.1 Fragen 2
1.1.1 Folgen 2
1.1.2 Reihen 3
1.2 Antworten 4
1.2.1 Folgen 4
1.2.2 Reihen 9

1 Folgen und Reihen

1.1 Fragen

1.1.1 Folgen

Frage 1: Was ist eine Folge?

Frage 2: Wie kann man eine Folge darstellen?

Frage 3: Wie ist der Grenzwert für eine reelle Zahlenfolge definiert?

Frage 4: Existiert immer ein Grenzwert?

Frage 5: Was heißt "eine Folge konvergiert"?

Frage 6: Wie schreiben wir den Grenzwert einer Folge?

Frage 7: Was schreiben wir, wenn eine Folge keinen Grenzwert hat?

Frage 8: Was für Fälle unterscheidest Du, wenn eine Folge konvergiert?

Frage 9: Welche der folgenden Folgen konvergieren, welche divergieren bestimmt, welche unbestimmt? Im Fall von Konvergenz bestimme den Grenzwert.
a) $1, 1, 1, \ldots$
b) $+1, -1, +1, -1, \ldots$
c) $1, 2, 3, 4, \ldots$
d) $1, -2, 3, -4, 5, -6 \ldots$
e) $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $a_k = 1/k$
f) $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $a_k = (-1)^k /k$
g) $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $a_k = 1 - 1/k$
h) $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $-\sqrt{k}$
i) $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $a_k = (-1)^k \cdot 2$

Frage 10: Was ist eine Nullfolge?

Frage 11: Was ist eine Geometrische Folge?

Frage 12: Welche der nachstehenden Folgen sind geometrisch? Bestimme gegebenenfalls a und q für eine geometrische Folge $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $a_k = aq^{k-1}$.
a) $1, 1, 1, \ldots$
b) $-1, 1, -1, 1, \ldots$
c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
d) $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$
e) $5, 5/2, 5/4, 5/8, \ldots$
f) $7, 17, 27, \ldots$
g) $7, 14, 21, 28, \ldots$
h) $-2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

Frage 13: Was weißt Du über die Konvergenz einer geometrischen Folge? Diskutiere alle möglichen Fälle.

Frage 14: Wann konvergiert die Folge $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit

$$a_k = \frac{b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + \ldots + b_m k^m}{c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \ldots + c_n k^n} \ ?$$

Falls die Folge konvergiert, bestimme den Grenzwert.

Frage 15: Welche der folgenden Folgen $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ konvergieren. Welche divergieren bestimmt, welche unbestimmt? Im Fall von Konvergenz bestimme den Grenzwert.
a) $a_k = \frac{3k^2-2k+5}{-2k^2+5}$
b) $a_k = \frac{-k}{2k^2}$
c) $a_k = \frac{k^5-3k}{k^4+2}$
d) $a_k = \frac{-k^2+k+6}{-k-3}$
e) $a_k = \frac{k^7+k^6+3k^2}{-k^2+3}$

Frage 16: Kennst Du Rechenregeln für Grenzwerte? Welche Bedingungen müssen erfüllt ein, damit Du diese Regeln anwenden kannst?

Frage 17: Falls $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ und $(b_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ zwei divergente Folgen sind, divergiert dann auch die Folge $(c_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ mit $c_k = a_k + b_k$?

1.1.2 Reihen

Frage 18: Was ist eine Reihe?

Frage 19: Wie kann man eine Reihe darstellen?

Frage 20: Was sind die Teilsummen (Partialsummen) einer Reihe?

Frage 21: Wann konvergiert eine Reihe?

Frage 22: Wann divergiert eine Reihe bestimmt, wann unbestimmt?

Frage 23: Was kannst Du bei folgenden Reihen über Konvergenz, Divergenz sagen?
a) $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$
b) $\sum_{k=1}^{\infty} 0$
c) $1 + 2 + 3 + \ldots$
d) $\sum_{k=1}^{\infty} -k$

Frage 24: Wann sprechen wir von einer geometrischen Reihe?

Frage 25: Wie können wir eine geometrische Reihe schreiben?

Frage 26: Wie sehen die Teilsummen einer geometrischen Reihe aus? Kennst Du die entsprechende Formel?

Frage 27: Was kannst Du über die Konvergenz einer geometrischen Reihe sagen?

Frage 28: Wie lautet der Grenzwert einer konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$?

Frage 29: Berechne den Grenzwert von folgenden Reihen.
a) $\sum_{k=1}^{\infty} 3\,(0.5)^{k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{k-1}$
c) $3 + 3/2 + 3/4 + 3/8 + \ldots$

Frage 30: Was ist der Grenzwert für eine geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ mit $q = 0$?

Frage 31: Wie lautet die harmonische Reihe und was weißt Du über ihr Grenzverhalten?

Frage 32: Welches sind die wichtigsten, die man kennen sollte?

1.2 Antworten

1.2.1 Folgen

Antwort 1: Eine Folge ist eine Aufzählung von Elementen. In unserem Fall betrachten wir reelle Zahlenfolgen, d.h. Aufzählungen von reellen Zahlen. Hat eine Folge nur endlich viele Mitglieder, so nennt man diese eine endliche Folge. Wenn wir von einer Folge sprechen, meinen wir in Zukunft eine unendliche Zahlenfolge.

Antwort 2: Eine Folge kann man auf verschiedene Arten notieren:
a) $a_1, a_2, a_3, \ldots$
b) $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$
c) $2, 4, 6, \ldots$
d) $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$ mit $a_k = 2k$ für $k \epsilon \mathbf{N}$

Antwort 3: Eine Folge $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$ hat den Grenzwert a, wenn für jede noch so kleine Zahl ε ein $k_0 \epsilon \mathbf{N}$ existiert, so dass $|a_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$.
Was heißt das genau:
Falls a ein Grenzwert von $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$ ist, liegen die Folgenelemente $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \ldots$ alle ganz nahe beim Grenzwert. Was meinen wir aber mit ganz nahe? Für jeden noch so kleinen Abstand ε finden wir ein $k_0 \epsilon \mathbf{N}$, so dass $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \ldots$ innerhalb dieses Abstands liegen.
In Abbildung 1 sehen wir diese Situation für eine konvergente Folge skizziert. Oben ist ε größer als unten, dafür ist oben k_0 kleiner als unten.

Antwort 4: Es gibt natürlich Folgen, die keinen Grenzwert haben, ein Beispiel ist in Abbildung 2 skizziert. In der Skizze sieht man sofort, dass kein Wert a gefunden werden kann, so dass sich mal alle Folgenmitglieder diesem annähern würden.

Antwort 5: Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, dann konvergiert sie.

Antwort 6: Hat eine Folge $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$ den Grenzwert a, so schreiben wir

$$\lim_{k \to \infty} a_k = a.$$

Antwort 7: Hat eine Folge $(a_k)_{k \epsilon \mathbf{N}}$ keinen Grenzwert, so schreiben wir

$$\lim_{k \to \infty} a_k \text{ existiert nicht.}$$

Antwort 8: Wenn eine Folge nicht konvergiert, dann sagen wir, sie divergiert.
Dabei unterscheiden wir noch die bestimmte und die unbestimmte Divergenz.
a) bestimmte Divergenz:
Eine Folge divergiert bestimmt gegen plus unendlich, wenn für jede noch so große Zahl c ein $k_0 \epsilon \mathbf{N}$ existiert,

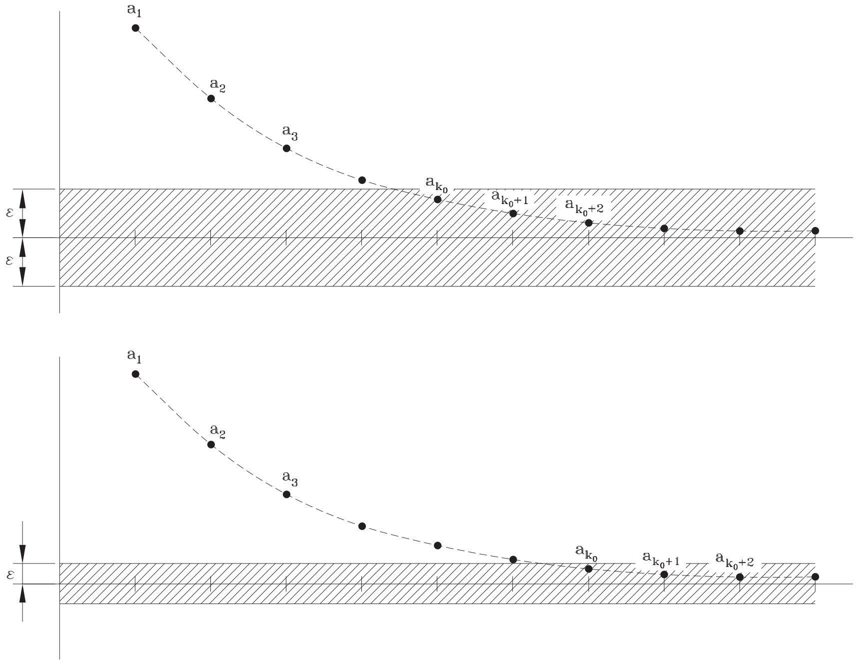

Abbildung 1: Grenzwert einer Folge

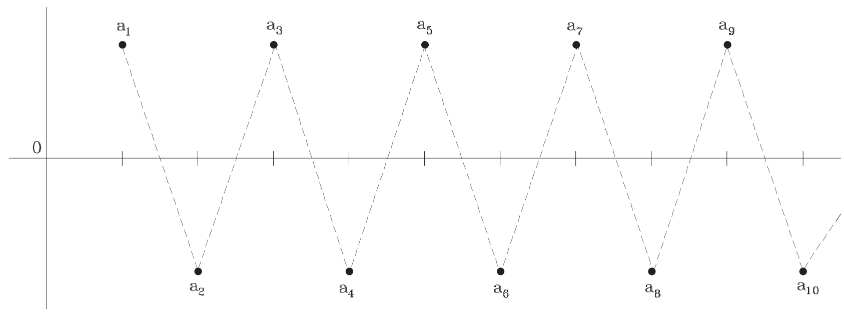

Abbildung 2: Divergente Folge

so dass $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \ldots$ alle größer sind als c. Die Situation ist in Abbildung 3 dargestellt. Man sieht, dass für jedes noch so große c alle Folgenmitglieder $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \ldots$ oberhalb von c liegen. Wenn wir c noch größer wählen, wird einfach auch k_0 größer.
Analog divergiert eine Folge bestimmt gegen minus unendlich, wenn für jede noch so kleine Zahl c ein $k_0 \epsilon \mathbf{N}$ existiert, so dass $a_{k_0}, a_{k_0+1}, a_{k_0+2}, \ldots$ kleiner sind als c.
Wenn eine Folge bestimmt divergiert, schreiben wir

$$\lim_{k \to \infty} a_k = +\infty$$

für bestimmte Divergenz gegen plus unendlich und

$$\lim_{k \to \infty} a_k = -\infty$$

für bestimmte Divergenz gegen minus unendlich.
b) unbestimmte Divergenz:
Eine Folge die weder konvergiert noch bestimmt divergiert heißt unbestimmt divergent.

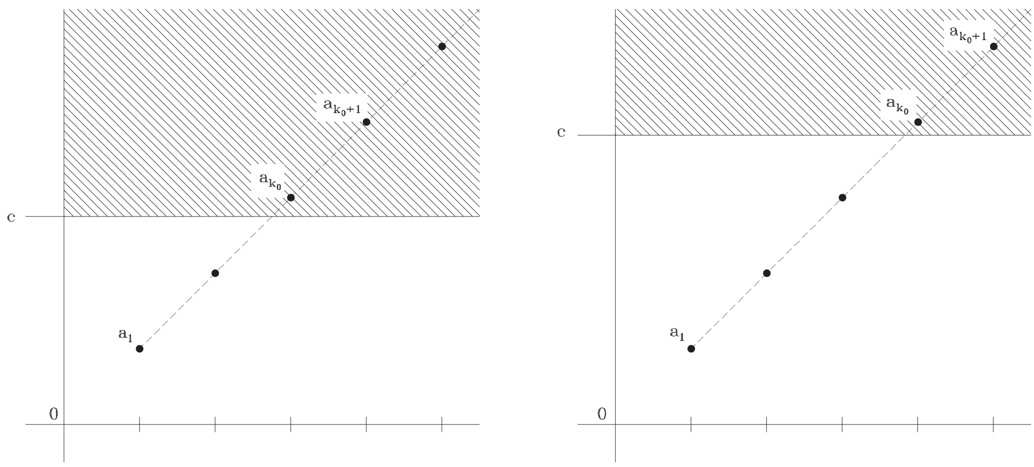

Abbildung 3: Folge divergiert bestimmt gegen plus unendlich

Antwort 9: Es ergeben sich folgende Resultate:
a) konvergiert gegen 1
b) divergiert unbestimmt
c) divergiert bestimmt gegen plus unendlich
d) divergiert unbestimmt
e) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
f) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
g) $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$
h) $\lim_{k\to\infty} a_k = -\infty$
i) $\lim_{k\to\infty} a_k$ existiert nicht

Antwort 10: Eine Nullfolge ist eine konvergente Folge mit Grenzwert 0.

Antwort 11: Eine Folge heißt geometrisch, wenn es eine Zahl q gibt, so dass gilt $a_{n+1} = a_n q$ für alle $n \epsilon \mathbf{N}$, also:

$$\begin{aligned} & a_1 = a = aq^0 \\ & a_2 = aq = aq^1 \\ & a_3 = a_2 q = aq^2 \\ & \vdots \\ & a_n = aq^{n-1} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Antwort 12: Es ergeben sich folgende Resultate:
a) geometrische Folge mit $a_k = 1 \cdot (1)^{k-1}$
b) geometrische Folge mit $a_k = (-1) \cdot (-1)^{k-1}$
c) geometrische Folge mit $a_k = 1 \cdot (-1)^{k-1}$
d) geometrische Folge mit $a_k = 1 \cdot (1/2)^{k-1}$
e) geometrische Folge mit $a_k = 5 \cdot (1/2)^{k-1}$
f) nicht geometrisch, bestimmt divergent gegen $+\infty$
g) nicht geometrisch, bestimmt divergent gegen $+\infty$
h) nicht geometrisch, unbestimmt divergent

Antwort 13: Die Konvergenz einer geometrischen Folge mit $a_k = aq^{k-1}$ hängt nur von q, nicht aber von a ab (außer im trivialen Fall $a = 0$, wo alle Folgenmitglieder 0 sind).

a) $q \leq -1$
Die Folge divergiert unbestimmt. In Abbildung 4 links sehen wir die Situation für $q < -1$, rechts für $q = -1$.

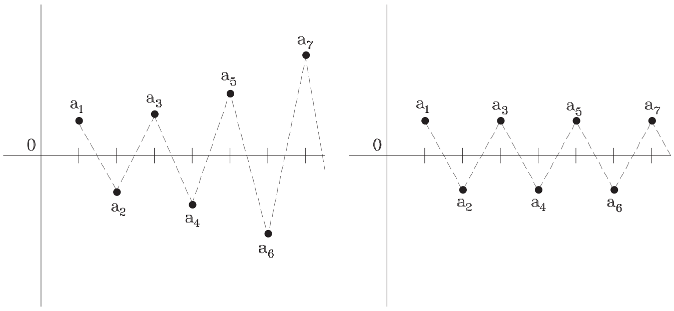

Abbildung 4: Geometrische Folge

b) $|q| < 1$ (d.h. $-1 < q < 1$)
Die Folge konvergiert gegen 0. In Abbildung 5 links ist die Situation für $-1 < q < 0$ skizziert, in der Mitte für $q = 0$ und rechts für $0 < q < 1$.

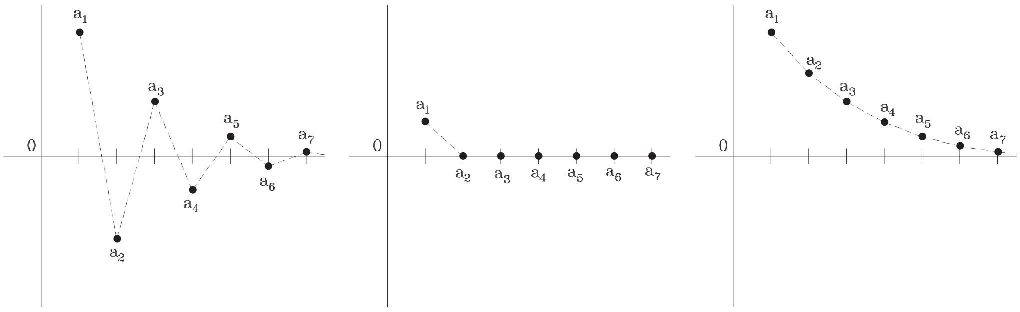

Abbildung 5: Geometrische Folge

c) $q = 1$
Die Folge konvergiert gegen a (siehe Abb. 6).

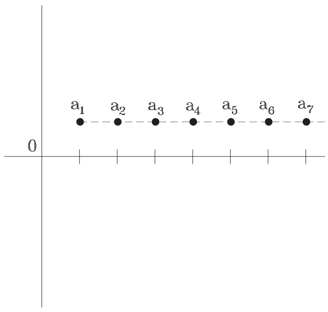

Abbildung 6: Geometrische Folge

d) $q > 1$
Die Folge divergiert bestimmt gegen plus unendlich falls $a > 0$ (Abb. 7 links) und gegen minus unendlich falls $a < 0$ (Abb. 7 rechts).

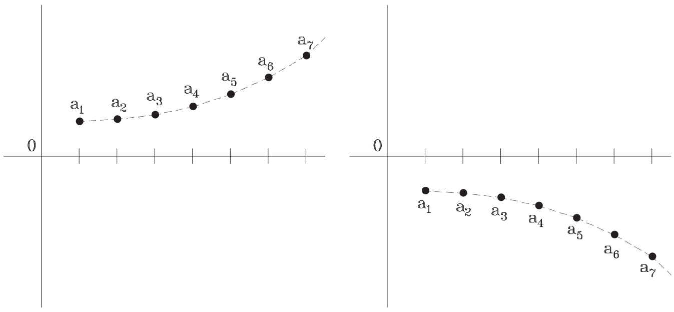

Abbildung 7: Geometrische Folge

Antwort 14: Diese Folge konvergiert wenn $m \leq n$ gilt, das heißt wenn der größte Exponent im Zähler kleiner oder gleich ist als der größte Exponent im Nenner.
Falls $m = n$ folgt

$$\lim_{a_k \to \infty} a_k = \frac{b_m}{c_n}.$$

Falls $m < n$ folgt

$$\lim_{a_k \to \infty} a_k = 0.$$

Antwort 15: Es ergeben sich folgende Resultate:
a) $\lim_{k\to\infty} a_k = -3/2$
b) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
c) $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$
d) $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$
e) $\lim_{k\to\infty} a_k = -\infty$

Antwort 16: Falls $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ und $(b_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ Folgen sind, deren Grenzwerte existieren, d.h. $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ und $\lim_{k\to\infty} b_k = b$, dann gelten folgende Regeln:

$$\textbf{a)}\ \lim_{k\to\infty} \left((a_k)^n\right) = \left(\lim_{k\to\infty} a_k\right)^n = a^n$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{k\to\infty} (a_k + b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k = a + b$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{k\to\infty} (a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k = a - b$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{k\to\infty} (a_k \cdot b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \cdot \lim_{k\to\infty} b_k = a \cdot b$$

Falls zusätzlich gilt: $b_k \neq 0$ für alle k und $b \neq 0$:

$$\textbf{e)}\ \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\lim_{k\to\infty} a_k}{\lim_{k\to\infty} b_k} = \frac{a}{b}$$

Antwort 17: Nein, zum Beispiel:

$$a_k = (-1)^k ; b_k = -(-1)^k$$

Offensichtlich sind diese beiden Folgen divergent. Nun gilt aber

$$c_k = a_k - b_k = 0,$$

d.h. $(c_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ ist konvergent.

1.2.2 Reihen

Antwort 18: Eine Reihe entsteht aus einer Folge, indem man die Elemente der Folge addiert. Falls die Folge unendlich viele Elemente besitzt, sprechen wir von einer unendlichen Reihe. Wenn also $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ eine Folge ist, so ist $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ die zugehörige Reihe.

Antwort 19: Mögliche Notationen für Reihen sind:
a) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
c) $1 + 2 + 3 + \ldots$
d) $\sum_{k=1}^{\infty} k$

Antwort 20: Die Teilsummen einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bilden eine Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, wobei $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, d.h. s_k wird dadurch gebildet, dass man die ersten k Elemente der Folge zusammenzählt.

Antwort 21: Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ der Teilsummen konvergiert. Diese Definition leuchtet ein, denn es gilt ja $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Antwort 22: Wie bei der Konvergenz führen wir auch den Begriff der Divergenz auf das Verhalten der Teilsummenfolge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ zurück. Divergiert diese bestimmt, so divergiert die Reihe bestimmt. Für unbestimmte Divergenz gehen wir analog vor.

Antwort 23: Es ergeben sich folgende Resultate:
a) divergiert unbestimmt
b) konvergiert gegen 0
c) divergiert bestimmt gegen $+\infty$
d) divergiert bestimmt gegen $-\infty$

Antwort 24: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt geometrisch, falls die zu Grunde liegende Folge $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ geometrisch ist.

Antwort 25: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine geometrische Reihe, dann ist also $(a_k)_{k\epsilon\mathbf{N}}$ eine geometrische Folge, d.h. $a_k = aq^{k-1}$. Damit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}.$$

Antwort 26: Für eine Geometrische Reihe $a\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ gilt $s_n = a\left(q^0 + \ldots q^{n-1}\right) = a\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$. Die Teilsummen lassen sich mit folgender Formel berechnen:

$$s_n = a\frac{1-q^k}{1-q}.$$

Natürlich macht diese Formel nur für $q \neq 1$ Sinn macht. Für $q = 1$ brauchen wir aber auch keine Formel, denn dann gilt ja trivialerweise $s_n = na$.

Antwort 27: Um etwas über die Konvergenz sagen zu können, müssen wir $lim_{n\to\infty} s_n$ betrachten, wobei die s_n die Teilsummen sind. Sei also $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ unsere geometrische Reihe. Natürlich hat a auf das Konvergenzverhalten kein Einfluss, außer dass für ein negatives a die Vorzeichen vertauschen. Den Fall

$a = 0$ muss man nicht weiter betrachten, da dann sowieso alles Null wird. Wir müssen nun also die möglichen Werte für q betrachten.
a) $q \leq -1$
Die Reihe divergiert unbestimmt. In Abbildung 8 links ist die Situation für $q < -1$ skizziert, rechts für $q = -1$.

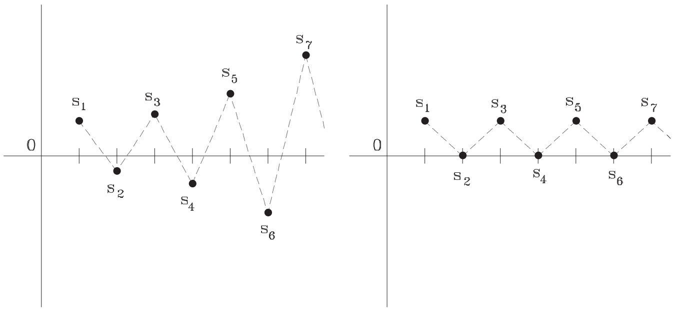

Abbildung 8: Geometrische Reihe

b) $|q| < 1$ (d.h. $-1 < q < 1$)
Die Reihe konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$. In Abbildung 9 links ist die Situation für $-1 < q < 0$ skizziert, in der Mitte für $q = 0$ und rechts für $0 < q < 1$.

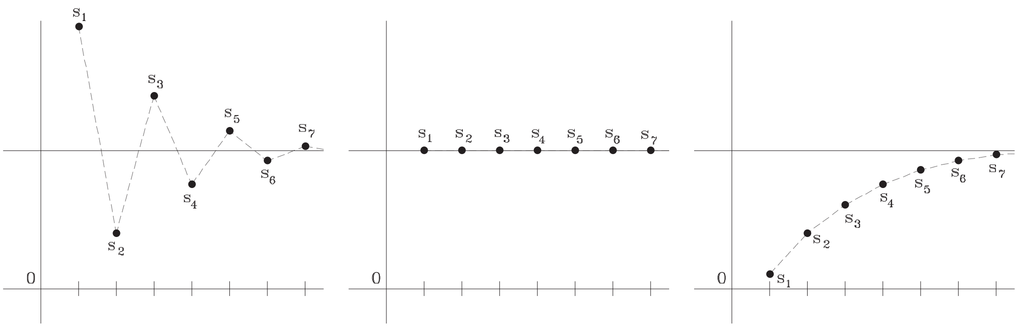

Abbildung 9: Geometrische Reihe

c) $q = 1$
Die Reihe divergiert bestimmt. In Abbildung 10 links ist die Situation für $a > 0$ skizziert, rechts für $a < 0$.

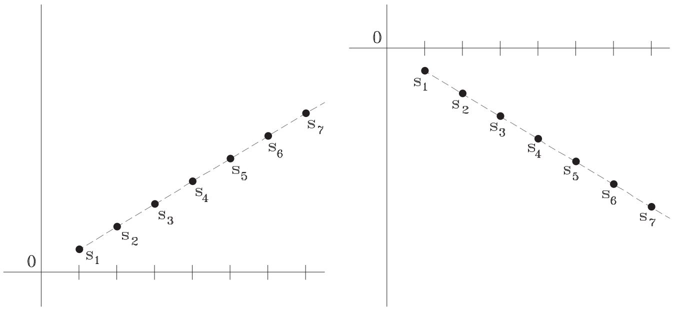

Abbildung 10: Geometrische Reihe

d) $q > 1$
Die Reihe divergiert bestimmt. In Abbildung 11 links ist die Situation für $a > 0$ skizziert, rechts für $a < 0$.

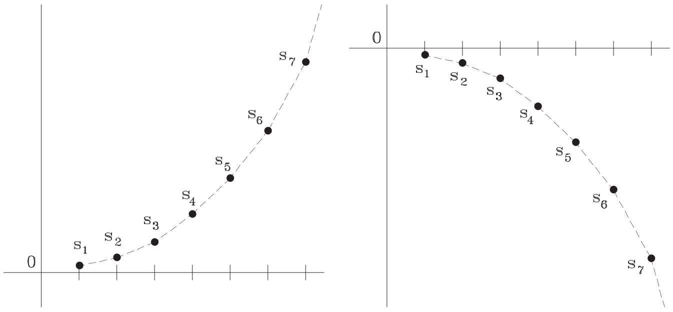

Abbildung 11: Geometrische Reihe

Antwort 28: $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$

Antwort 29: Es ergeben sich folgende Resultate:
a) $a = 3, q = 1/2$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot (0.5)^{k-1} = \frac{3}{1-0.5} = 6$
b) $a = 3, q = 2$
$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{k-1}$ existiert nicht, da $q = 2 > 1$.
Genauer haben wir bestimmte Konvergenz gegen plus unendlich und können deshalb schreiben $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{k-1} = +\infty$
c) $a = 3, q = 1/2$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot (0.5)^{k-1} = \frac{3}{1-0.5} = 6$

Antwort 30: Für $q = 0$ gilt natürlich $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a$

Antwort 31: Die harmonische Reihe lautet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

oder

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

Diese Reihe ist divergent.

Antwort 32: Die wichtigsten Reihen sind sicher die geometrische und die harmonische Reihe.