Grenzwerte von Funktionen:

Zweck: Kann man in eine Funktion einen Wert nicht direkt einsetzen (Definitionslücken, Unendlich, Rand eines offenen Definitionsbereiches) interessieren wir uns dafür wohin der Funktionswert strebt, wenn wir in die Nähe dieses Wertes kommen.

Schreibweise:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ldots$ (wohin strebt die Funktion, wenn wir nach rechts gehen)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$ (wohin strebt die Funktion, wenn wir nach links gehen)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ldots$ (wohin strebt die Funktion, wenn wir uns $x=1$ nähern)

$\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x) = \ldots$ (wohin strebt die Funktion, wenn wir uns von rechts $x=1$ nähern)

$\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = \ldots$ (wohin strebt die Funktion, wenn wir uns von links $x=1$ nähern)

Berechnen von Grenzwerten:

Um einen Grenzwert zu berechnen, setzt man einfach den x-Wert ein. Dabei bedeutet:

Limes kann direkt angegeben werden:

$\frac{1}{0} = \pm\infty$ (Vorzeichen überlegen)

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\frac{0}{1} = 0$

$\frac{0}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{1} = \infty$

$\frac{\infty}{0} = \pm\infty$ (Vorzeichen überlegen)

Algebraische Umformung ist nötig!

$$\left[\begin{array}{l} 0 \cdot \infty \\[6pt] \dfrac{\infty}{\infty} \\[6pt] \dfrac{0}{0} \end{array}\right.$$

Beispiele:

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{“} = 0$$

- $$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = \text{„}\frac{1}{-0}\text{“} = -\infty$$

- $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$ (dh. zuerst Umformen)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) \underset{\substack{\uparrow \\ h=0 \text{ einsetzen}}}{=} 2x$$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 + x - 7} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = \text{„}\frac{-1+0+0}{3+0+0}\text{“} = \frac{-1}{3}$$

Anwendungen:

- Verhalten von Funktionen im Unendlichen
- Verhalten von Funktionen in der Nähe von Definitionslücken (hier immer Linksseitiger und Rechtsseitiger grenzwert seperat betrachten)
- Ableitungsdefinition: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

  ↳ Versuche jeweils h zu kürzen und dann $h = 0$ einzusetzen

- Uneigentliche Integrale (mindestens eine grenze ist Unendlich)

  $$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)\,dx$$

- Stetigkeit in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Differenzierbarkeit in x_0: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert