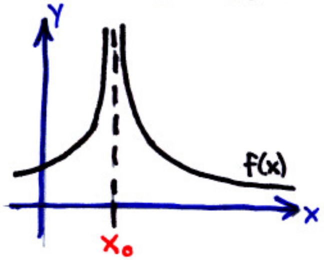
Stetigkeit & Differenzierbarkeit

Definition:

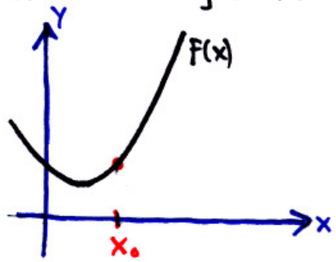
- Eine Funktion $f(x)$ heisst stetig in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
  Falls eine Funktion in allen x_0 stetig ist, dann sagt man $f(x)$ ist stetig.
- Eine Funktion $f(x)$ heisst differenzierbar, wenn $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existiert.
  Ist eine Funktion für alle x_0 differenzierbar, dann sagt man $f(x)$ ist differenzierbar.

Anschaulich:

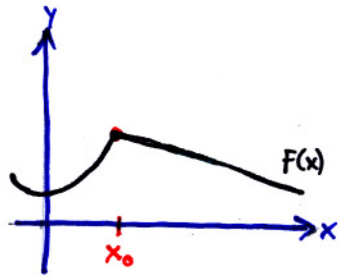
- Eine Funktion ist an einer Stelle stetig, wenn sie dort definiert ist und keinen Sprung macht.
- Eine Funktion ist an einer Stelle differenzierbar, wenn sie dort glatt (keine Spitze) ist. Dazu muss sie insbesondere auch stetig sein.



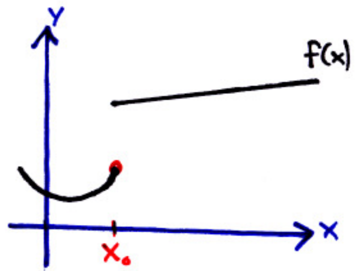
f ist nicht definiert an der Stelle x_0, also auch nicht stetig und nicht differenzierbar.



f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung und ist glatt.
$\Rightarrow$ stetig und diff'bar



f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung aber dafür eine Spitze.
$\Rightarrow$ stetig aber nicht diff'bar.



f hat an der Stelle x_0 einen Sprung und ist somit natürlich auch nicht glatt.
$\Rightarrow$ weder stetig noch diff'bar.

Konkret: Alle für uns relevanten Funktionen sind stetig und diff'bar auf dem ganzen Definitionsbereich, bis auf folgende Ausnahmen:

- $f(x) = \sqrt{x}$ (sowie weitere Wurzelfunktionen): nicht diff'bar an der Stelle $x = 0$ ($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, senkrechte Tangente)
- $f(x) = |x|$ (sowie weitere Betragsfunktionen): nicht diff'bar an der Stelle $x = 0$ ($|\ldots|$ umschreiben in Zusammenge..)
- $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$

  stetig falls $f_1(x_0) = f_2(x_0)$
  diff'bar falls $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ und $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$ (an der Stelle x_0)