# Vektorgeometrie

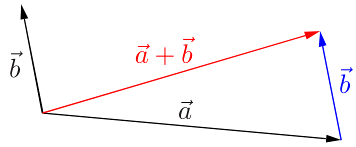
Version: 28. Dezember 2007
*(Bitte nur für den Eigengebrauch verwenden)*

## 1. Mathematische Operationen für Vektoren

`Addition`

$\vec{a}+\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

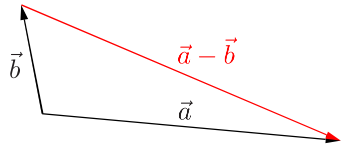



---

`Subtraktion`

$\vec{a}-\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$$

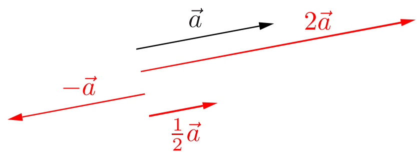



---

`Skalare Multiplikation`

$\lambda\cdot\vec{a}$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_1 \\ \lambda\cdot a_2 \\ \lambda\cdot a_3 \end{pmatrix}$$



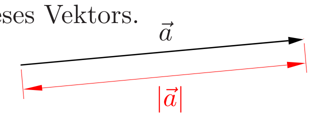

---

`Betrag`

$|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$

Der Betrag von Vektor $\vec{a}$ ist gerade die Länge dieses Vektors.

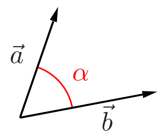



---

`Skalarprodukt`

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$




Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man Winkel zwischen 2 Vektoren berechnen.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Wichtig: $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

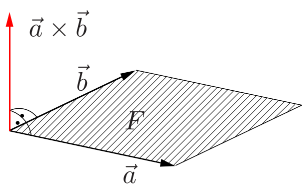
---

! nur 3D !

`Vektorprodukt`

$\vec{a}\times\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$




$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = F$

**Wichtige Anwendungen:**

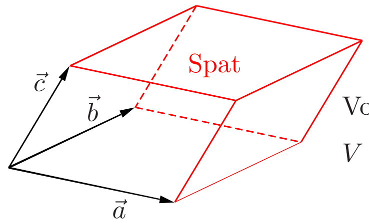
- Normalvektor einer Ebene $(A,\vec{b},\vec{c})$: $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}$
- Dreiecksfläche: $F=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$
- Abstand Gerade $(A,\vec{b})$ und Punkt $(P)$: $d=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{b}\right|}{|\vec{b}|}$
- $\vec{a},\vec{b}$ kolinear $\Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$

! nur 3D !

`Spatprodukt`

$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$




Volumen des Spat:
$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

**Wichtige Anwendungen:**

- Volumen eines Tetraeders: $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$
- Abstand von 2 Geraden $g\ (A, \vec{b})$ und $h\ (C, \vec{d})$:
  $d = \frac{\left|\left(\vec{b} \times \vec{d}\right) \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{b} \times \vec{d}\right|}$

---

`Gesetze für die Grundoperationen`

- Kommutativgesetz $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz $\quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \qquad (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\,(\mu \cdot \vec{a})$
- Distributivgesetz $\quad \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \qquad (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

---

`Gesetze für das Rechnen mit dem Skalarprodukt`

- Kommutativgesetz $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Assoziativgesetz $\quad (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$
- Distributivgesetz $\quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Quadrat $\quad \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

---

! nur 3D !

`Gesetze für das Rechnen mit dem Vektorprodukt`

- Kommutativgesetz $\quad$ gilt nicht, aber: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Assoziativgesetz $\quad$ gilt nicht allgemein
- Distributivgesetz $\quad \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(x\vec{a}) \times \left(y\vec{b}\right) = xy\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

---

`Gesetze für das Rechnen mit dem Spatprodukt`

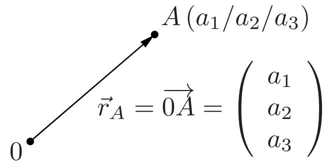
- Zyklische Permutation $\quad \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right]$
- $\left[x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}\right] = xyz \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$
- $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right]$

## 2. Vektoren und Punkte

### Ortsvektoren: Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_A = \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



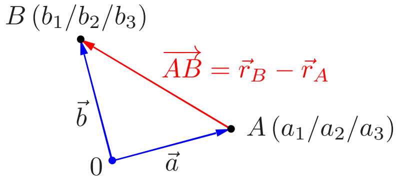

---

### Vektor zwischen zwei Punkten

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



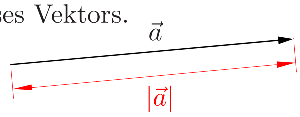

---

### Länge eines Vektors (=Betrag)

$|\vec{a}|$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Der Betrag von Vektor $\vec{a}$ ist gerade die Länge dieses Vektors.



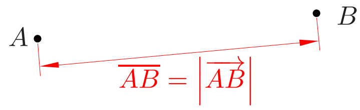

---

### Abstand zwischen zwei Punkten

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



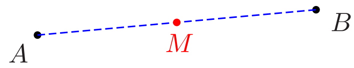

---

### Mittelpunkt $M$ einer Strecke $\overline{AB}$

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{r}_M = \overrightarrow{0M} = \frac{1}{2}\,(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$




---

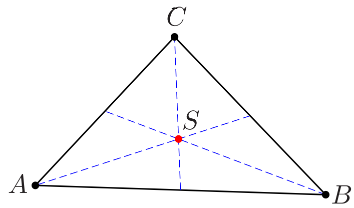
### Schwerpunkt $S$ eines Dreiecks $ABC$

$A\,(a_1/a_2/a_3)$

$B\,(b_1/b_2/b_3)$

$C\,(c_1/c_2/c_3)$

$$\vec{r}_S = \overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}\,(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

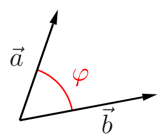



---

### Winkel zwischen 2 Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



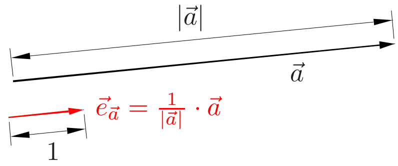

**Wichtige Anwendungen:**

- Winkel zwischen zwei Geraden $g\ (A, \vec{b})$ und $h\ (C, \vec{d})$:
  $\cos\varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{d}|} \right|$
- Winkel zwischen Gerade $g\ (A, \vec{b})$ und Ebene $E\ (C, \vec{n})$:
  $\sin\varphi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{n}|} \right|$
- Winkel zwischen Ebene $E_1\ (A, \vec{n_1})$ und $E_2\ (B, \vec{n_2})$:
  $\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right|$

## `Einheitsvektoren (Vektor mit Länge 1)`

$\vec{a}$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$




---

## `Parallele (kollineare) Vektoren`

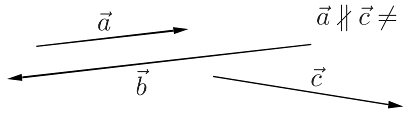
$\vec{a}, \vec{b}$

Zwei Vektoren sind genau dann kollinear (gleiche oder entgegengesetzte Richtung), wenn sie Vielfache voneinander sind:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ kollinear } \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

$\vec{a} \| \vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \nparallel \vec{c} \neq \lambda \cdot \vec{a}$




---

## `Senkrechte (normale) Vektoren`

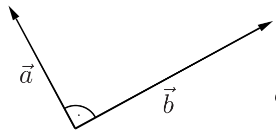
$\vec{a}, \vec{b}$

- $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Senkrechte Vektoren produzieren im 2-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

- Senkrechte Vektoren produzieren im 3-Dimensionalen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



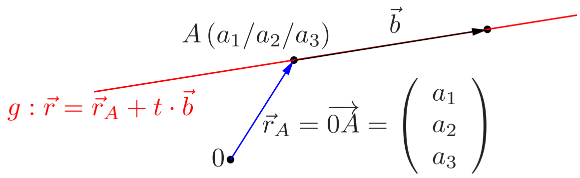

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

## 3. Die Gerade

### Parameterdarstellung der Geraden

Startpunkt: $A\,(a_1/a_2/a_3)$ $\qquad g:\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{b}$

Richtung: $\vec{b}$ $\qquad g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

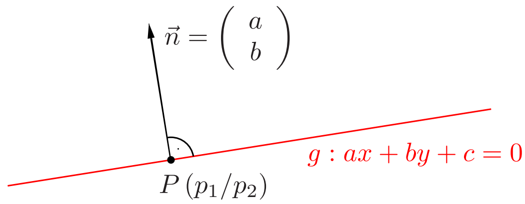



! nur 2D !

### Koordinatengleichung der Geraden

Normalvektor zu $g$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\qquad g:ax+by+c=0$

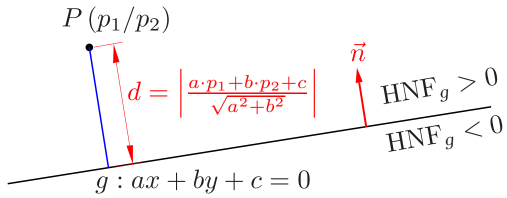
Punkt auf $g$: $P\,(p_1/p_2)$




### HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Gerade

$g:ax+by+c=0$ $\qquad \mathrm{HNF}_g:\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$

$P\,(p_1/p_2)$ $\qquad d=\left|\mathrm{HNF}_g\,(P)\right|=\left|\dfrac{a\cdot p_1+b\cdot p_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

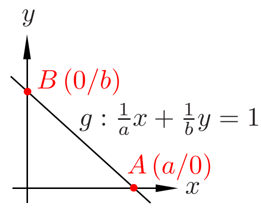



### Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)

$g:ax+by+c=0$

Achsenabschnittsgleichung:
$$\frac{1}{a}\cdot x+\frac{1}{b}\cdot y=1$$

$\Rightarrow A\,(a/0)\,,B\,(0/b)$ sind die Achsenabschnitte

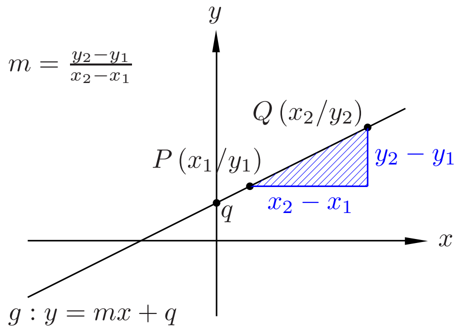



### Explizite Darstellung (Lineare Funktion)

$P\,(x_1/y_1)$ $\qquad g:y=mx+q$

$Q\,(x_2/y_2)$

- ∘ Steigung: $\qquad m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- ∘ $y$-Achsenabschnitt: $\qquad q$
- ∘ Senkrechte Steigung: $\qquad m_\perp=-\dfrac{1}{m}$
- ∘ Winkel zwischen $g$ und $h$: $\qquad \tan\gamma=\left|\dfrac{m_h-m_g}{1+m_g\cdot m_h}\right|$



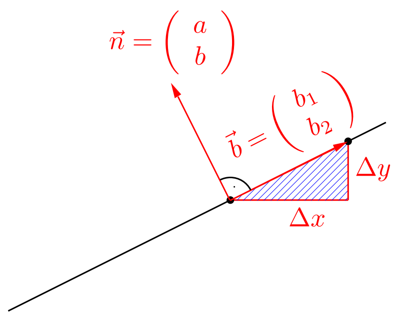

### Zusammenhang zwischen Richtungvektor $\vec{b}$, Normalenvektor $\vec{n}$ und Steigung $m$

$g:\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{b}$ $\qquad ∘\ \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_2\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\Delta y\\\Delta x\end{pmatrix}$

$g:ax+by+c=0$ $\qquad ∘\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}$

$g:y=mx+q$

$∘\ m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{b_2}{b_1}=-\dfrac{a}{b}$



## 4. Die Ebene

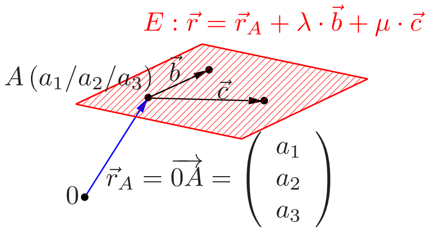
! nur 3D !

### `Parameterdarstellung der Ebene`

Startpunkt: $A\,(a_1/a_2/a_3)$ $\qquad g : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$

2 Richtungen: $\vec{b}, \vec{c}$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

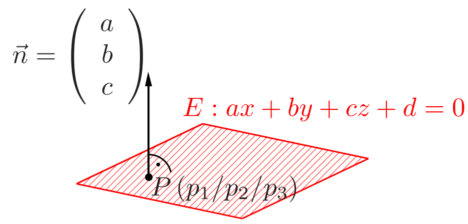



---

### `Koordinatengleichung der Ebene`

Normalvektor zu $E$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\qquad E : ax + by + cz + d = 0$

Punkt auf $E$: $\qquad P\,(p_1/p_2/p_3)$

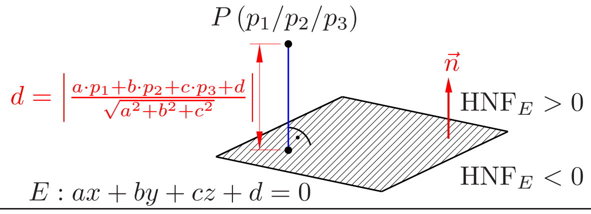



---

### `HNF (Hesse Normalform, spezielle Form der Koordinatengleichung), Abstand Punkt-Ebene`

$E : ax+by+cz+d = 0$ $\qquad \text{HNF}_E : \dfrac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

$P\,(p_1/p_2/p_3)$ $\qquad d = |\text{HNF}_E\,(P)| = \left| \dfrac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$




---

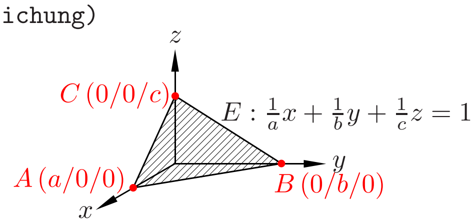
### `Achsenabschnittsgleichung (spezielle Form der Koordinatengleichung)`

$E : ax+by+cz+d = 0$

Achsenabschnittsgleichung:

$$\frac{1}{a} \cdot x + \frac{1}{b} \cdot y + \frac{1}{c} \cdot z = 1$$

$\Rightarrow A\,(a/0/0)\,, B\,(0/b/0)\,, C\,(0/0/c)$
sind die Achsenabschnitte




---

### `Zusammenhang zwischen den Richtungvektoren` $\vec{b}, \vec{c}$ `und dem Normalenvektor` $\vec{n}$

$E : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$

$E : ax+by+cz+d = 0$

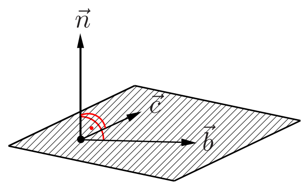
- $E : \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$

  $\Rightarrow \vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ ist ein Normalvektor

- $E : ax + by + cz + d = 0$

  $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor

  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren



## 5. Der Kreis

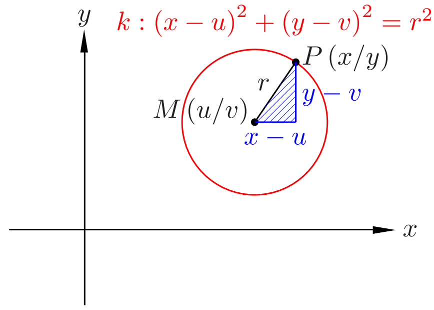
! nur 2D !

### `Mittelpunktsgleichung`

Mittelpunkt: $M\,(u/v)$

Radius: $r$

$$k:(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$




---

### `Ausmultiplizierte Form der Kreisgleichung`

Mittelpunkt: $M\,(u/v)$

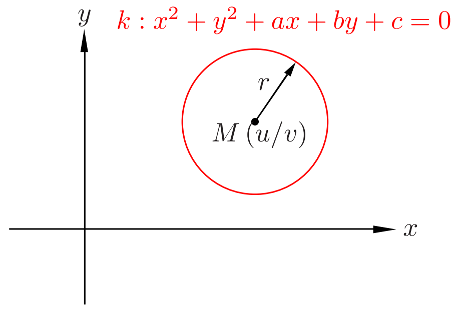
Radius: $r$

$$k:x^2+y^2+ax+by+c=0$$

und es gilt:

$$u=-\frac{a}{2} \qquad v=-\frac{b}{2}$$

$$r^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}>0$$




---

### `Polare` $p$ `eines Kreises` $k$ `bezüglich des Punkts` $P$

$k:(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

bzw.

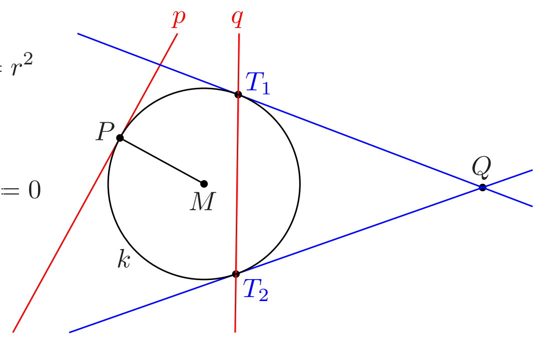
$k:x^2+y^2+ax+by+c=0$

$P\,(p_1/p_2)$

$$p:(p_1-u)\cdot(x-u)+(p_2-v)\cdot(y-v)=r^2$$

bzw.

$$p:p_1x+p_2y+\frac{1}{2}a\,(p_1+x)+\frac{1}{2}b\,(p_2+y)+c=0$$



## 6. Die Kugel

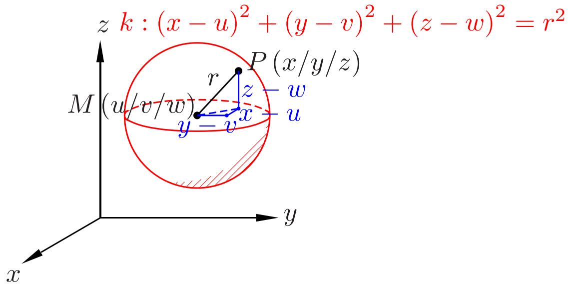
! nur 3D !

`Mittelpunktsgleichung`

Mittelpunkt: $M\,(u/v/w)$

Radius: $r$

$$k : (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$$




---

`Ausmultiplizierte Form der Kreisgleichung`

Mittelpunkt: $M\,(u/v/w)$

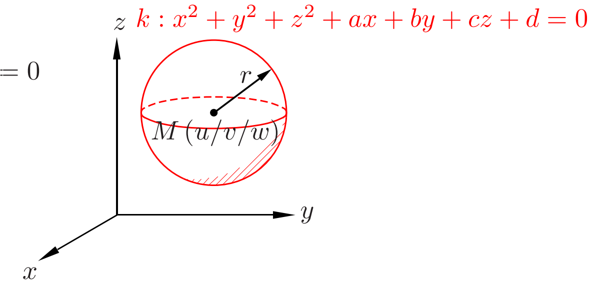
Radius: $r$

$$k : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

und es gilt:

$$u = -\frac{a}{2} \qquad v = -\frac{b}{2} \qquad w = -\frac{c}{2}$$

$$r^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4} > 0$$




---

`Polarebene` $p$ `einer Kugel` $k$ `bezüglich des Punkts` $P$

$$k : (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$$

bzw.

$$k : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$p : (p_1-u)\cdot(x-u) + (p_2-v)\cdot(y-v) + (p_3-w)\cdot(z-w) = r^2$$

bzw.

$$p : p_1x + p_2y + p_3z + \frac{1}{2}a\,(p_1+x) + \frac{1}{2}b\,(p_2+y) + \frac{1}{2}c\,(p_3+z) + d = 0$$

$P\,(p_1/p_2/p_3)$

$P$ auf Kugel $k$ $\qquad$ $P$ ausserhalb Kugel $k$